ANALES

DEL INSTITUTO DE INGENIEROS DE CHILE

Calle San Martín N.° 352 - Casilla 487 - Teléf. 88841 - Santiago - Chile

Año XXXII — Septiembre de 1932 — N.° 9

Hidráulica

Francisco Javier Domínguez S.

Nueva forma de la ecuación de la tangente a la curva de remanso en movimiento gradualmente variado permanente

La importancia creciente que en revistas y modernos tratados científicos de Hidráulica se viene dando al movimiento variado, responde al deseo de coincidir con la realidad objetiva en los problemas de corrientes abiertas, torpemente abordados muchas veces con fórmulas de movimiento uniforme. Este estudio, uno de los más interesantes en la Hidráulica de los Canales, ha logrado en Chile un desarrollo superior al de muchos países, gracias a las investigaciones del profesor Salas Edwards. Nos parece interesante contribuir a él presentando una manera muy sencilla de llegar a la expresión que da la inclinación de la tangente a la curva de remanso eliminando simplificaciones burdas de partida, como muy comúnmente se hace.

La fórmula clásica atribuída a Bélanger, que supone ancho infinito y constancia del coeficiente llamado de Chézy, b o C se escribe:

$$\frac{dh}{ds} = i\,\frac{h^3-h^3_u}{h^3-h^3_c}$$

En ella h es la profundidad actual de la corriente, h_u la profundidad de movimiento uniforme, o profundidad normal y h_c la profundidad crítica: i es la pendiente del lecho. La comparación de las alturas de agua da el signo de $\frac{dh}{ds}$ y la forma de la curva de remanso. El coeficiente b o C, a que hemos hecho referencia es el de las fórmulas

$$U = \frac{1}{\sqrt{b}}\sqrt{hi} = C\sqrt{hi}$$

en que el radio hidráulico se ha reemplazado por la altura de agua por considerarse el ancho infinito y en que b o C se supone independiente de dicha magnitud. Es de gruesa aproximación generalizar, suponiendo rigurosamente aplicable esa expresión en lechos de las formas usuales y en los que b o C varía, según fórmulas experimentales, con el radio hidráulico.

Para sentar la nueva expresión se supondrá lechos de formas usuales: rectangulares, parabólicos, trapeciales, etc. Se limita únicamente, al caso corriente, que la derivada $\frac{d\Omega}{dh}$, de la sección respecto a su altura sea o constante (lecho rectangular) o positiva. Esta derivada tiene por valor el ancho superficial, pues evidentemente $l\,d\,h = d\,\Omega$.

El escurrimiento es permanente, condición que se expresa por la constancia del gasto a lo largo del camino, es decir del producto de la sección Ω por la velocidad media U:

$$Q = \Omega\, U = cte$$

La forma geométrica del lecho, ancho de base, inclinación de taludes, etc., también se supone invariable a lo largo de la corriente; Ω que es función creciente de h varía gradualmente, aumentando o disminuyendo. También es función creciente de h el radio hidráulico, $R = \frac{\Omega}{\chi}$, razón entre la sección y el perímetro mojado.

Esto supuesto, la ecuación del movimiento gradualmente variado puede escribirse:

$$z + h + \frac{U^2}{2g} + \int J\, ds = cte$$

en ella z es la cota del fondo, h la altura de agua (fig. 1) en la sección normal, que en la ecuación debiera aparecer multiplicada por el coseno del ángulo que forma la sección normal con la vertical. Este ángulo es pequeñísimo en todos los casos prácticos y por lo tanto resulta indiferente aceptar h vertical en la ecuación. El sumando $\frac{U^2}{2g}$, altura de velocidad media, aparece sin término correctivo α, debido a la desigualdad de velocidades, pues su presencia no da mayor exactitud (1). La pérdida de carga debi-

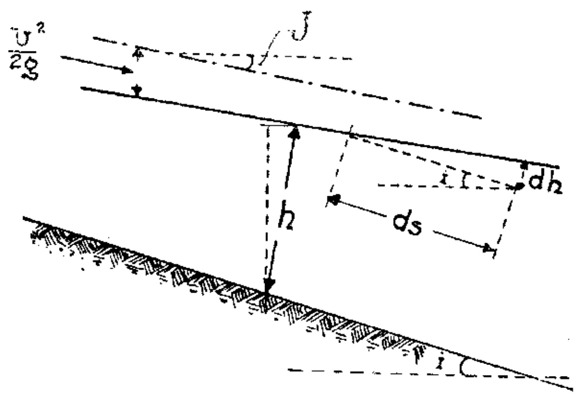


fig. 1.

---

(1) Escurrimiento Variado. Salas Edwards, 1928 y 1923. No este el sitio de hacer la crítica de puntos de partida adoptados por algunos autores para plantear la ecuación que nos preocupa; parece, sin embargo, venir el caso notar que no es lógico el valor de α que toma Mouret, (Cours d'Hydraulique Generale 1922-1923, págs. 439 y siguientes, reproducido en Eydoux, Hydraulyque Génerale et Appliquée, 1921), sacado del movimiento uniforme. Esto lleva a variaciones inaceptables de la profundidad crítica y complica estérilmente la discusión planteada, por otro lado, en bases exageradamente simplificatorias, como es el ancho indefinido.

da a los frotamientos está expresada, por unidad de longitud, por J, y su valor $\frac{U^2}{C^2R}$ es igual al que correspondería en movimiento uniforme a igual velocidad media, radio hidráulico y rugosidad de paredes (1).

Derivando la expresión respecto al camino se óbtiene:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{dh}{ds} + \frac{U}{g}\frac{dU}{ds} + J = o$$

La constancia del gasto, cuya derivada respecto al camino es en consecuencia nula, permite eliminar $\frac{dU}{ds}$ mediante las relaciones:

$$\frac{dQ}{ds} = o = \Omega\frac{dU}{ds} + U\frac{d\Omega}{ds}$$

$$\frac{dU}{ds} = -\frac{U}{\Omega}\frac{d\Omega}{ds}$$

pero como $d\Omega = l\,dh$ se tiene:

$$\frac{dU}{ds} = -\frac{U}{\Omega}\,l\,\frac{dh}{ds}$$

La ecuación es, pues:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{dh}{ds} - \frac{U^2 l}{g\Omega}\frac{dh}{ds} + J = o$$

La derivada $\frac{dz}{ds}$ mide lo que varía la cota del fondo por unidad de longitud, es, pues, la pendiente del lecho i, negativa generalmente; es decir que el fondo del lecho baja:

$$\frac{dz}{ds} = -i$$

(1) Escurrimiento Variado, págs. 35 y 36.—Curso de Hidráulica General.—Fco. Javier Domínguez, ápuntes, pág. 83-1932.

La ecuación viene a ser:

$$\frac{dh}{ds}\left(1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}\right) - i + J = o$$

de donde finalmente:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{1 - \frac{U^2 l}{g\Omega}}$$

La cantidad $g\frac{\Omega}{l}$ es homogénea a un cuadrado de velocidad, su raíz $\sqrt{g\frac{\Omega}{l}}$, es la expresión de la velocidad crítica o velocidad de la mínima energía cuando rige la ley hidrostática en la sección normal. En este caso no es la velocidad crítica que daría en el lecho el gasto Q, sino la correspondiente a la sección Ω que tiene la corriente en el punto considerado, siendo l su ancho superficial (1).

(1) Un ejemplo aclarará esta idea: en un canal rectangular de 2 m. de base escurre un gasto de $1\ m^3:s$; en un punto la profundidad de agua es de 1 m. Se pide calcular la velocidad U, la velocidad crítica U_c y la V_c.

Los datos dan $\Omega = 2\ m^2$; $l = 2$ m, $Q = 1\ m^3:s$

Se tiene $U = \frac{1}{2} = 0,5\ m:s$.

La velocidad crítica debe satisfacer la ecuación del gásto $Q = \Omega\sqrt{g\frac{\Omega}{l}}$, donde reemplazando valores se tiene:

$$1 = \Omega^{3/2}\sqrt{\frac{9,8}{2}};$$

$$\Omega = 0,589$$

$$U_c = \frac{1}{0,589} = 1,7\ m:s$$

El valor V_c es en cambio:

$$V_c = \sqrt{9,8\,\frac{2}{2}} = 3,14\ m:s.$$

Llamaremos V_c^2 a esta cantidad. La ecuación queda:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - J}{1 - \frac{U^2}{V_c^2}}$$

y el signo de $\frac{dh}{ds}$ y la forma del eje hidráulico se deduce de la comparación de i con J en el numerador y de U con V_c en el denominador.

Entre éstas son sencillas la de Manning (1890) y la de Forchheimer (1924), que por ser monomias nos convienen. Adoptando la de Forchheimer (1), que da para C el valor $\lambda R^{0,2}$, se tiene:

$$J = \frac{Q^2}{\lambda^2 \Omega^2 R^{1,4}}$$

El coeficiente λ depende únicamente de la rugosidad de paredes. El denominador es función creciente de h: para $h=0$, vale cero, y para $h=\infty$, vale tam-

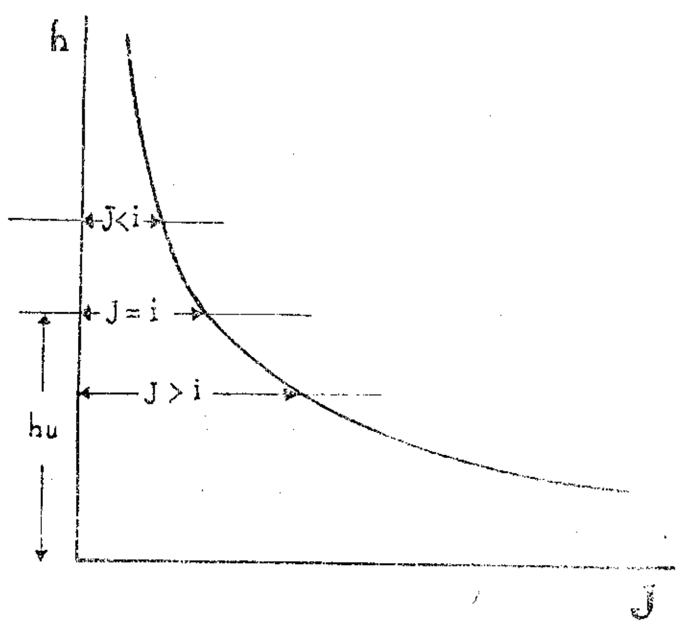


fig. 2.

Analicemos la variación de J con h para conocer su relación con i. La pérdida de carga J vale:

$$J = \frac{U^2}{C^2 R} = \frac{Q^2}{C^2 \Omega^2 R}$$

y según todas la expresiones experimentales, C es función creciente de R. En-

bién infinito, por lo tanto la variación de J con h se puede representar en el gráfico de la figura 2 en la forma de una hipérbola de las llamadas de grado superior.

(1) La fórmula de Forchheimer, comúnmente explícita en la velocidad, es $U = \lambda R^{0,7} J^{0,5}$, de donde se deduce, a través de la expresión $V = C\sqrt{RJ}$ el valor $C = \lambda R^{0,2}$.

Cuando el movimiento es uniforme, la pérdida de carga es igual a la pendiente del lecho, $J = i$ (y la profundidad es la llamada normal $h = h_n$).

Todos los valores de J menores que i corresponden a alturas de agua mayores que la de movimiento uniforme, corrientes que llamamos peraltadas, y a la inversa, si las J son mayores que las i, las corrientes son deprimidas. En resumen: si la corriente es peraltada, el numerador es positivo, nulo si es uniforme y negativo si es deprimida.

En el denominador V_c^2 es función creciente de h, en todas las formas de cunetas contempladas (1), que son las de la práctica. Ahora bien, el valor especial de V_c, que satisface la ecuación del gasto, es como se dijo la velocidad crítica, que llamaremos U_c y vale:

$$U_c = \frac{Q}{\Omega_c} = \sqrt{g\,\frac{\Omega_c}{l_c}}$$

esta velocidad corresponde a la altura de agua h_c, llamada crítica. Si la profundidad h es mayor que la crítica, según lo dicho, V_c es mayor que U_c, y U, la velocidad media, es menor que U_c, por la constancia del gasto. Por lo tanto, con mayor razón, V_c es mayor que U. Estas corrientes se denominan ríos. En profundidades menores que la crítica sucede lo contrario, esas corrientes son llamadas torrentes. En resumen, se tiene:

$$h > h_c \quad V_c > U \quad \frac{U^2}{V_c^2} < 1 \text{ ríos}$$

$$h = h_c \quad V_c = U \quad \frac{U^2}{V_c^2} = 1 \text{ crisis}$$

$$h < h_c \quad V_c < U \quad \frac{U^2}{V_c^2} > 1 \text{ torrentes}$$

De aquí deducimos que el denominador de la ecuación general es positivo en los ríos, nulo en la crisis y negativo en los torrentes.

El signo de la tangente a la curva del eje hidráulico, $\frac{dh}{ds}$, es positivo en los ríos peraltados y en los torrentes deprimidos y negativo en los ríos deprimidos y torrentes peraltados. Esto significa que el eje hidráulico se aparta del fondo hacia aguas abajo en los ríos peraltados y en los torrentes deprimidos y que, a la inversa, la altura del agua va disminuyendo hacia aguas abajo en los ríos deprimidos y en los torrentes peraltados.

---

(1) En efecto, como $V_c = \sqrt{g\,\frac{\Omega}{l}}$; basta probar que $\frac{\Omega}{l}$ es función creciente de h para demostrar lo dicho. En sección parabólica $\Omega = \frac{2}{3}\,l\,h$, por lo tanto, $\frac{\Omega}{l} = \frac{2}{3}\,h$, que crece con h. En sección rectangular $\Omega = l\,h$; $\frac{\Omega}{l} = h$, también. En cuneta trapecial, en que se tiene (fig. 3) $\Omega = b\,h + h^2\,tg\,\alpha$ y $l = b + 2\,h\,tg\,\alpha$,

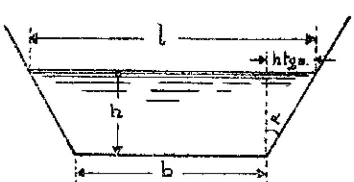


fig. 3.

la derivada de $\frac{\Omega}{l}$ respecto a h vale:

$$\frac{d\,\frac{\Omega}{l}}{d\,h} = 1 - \frac{2\,h\,tg\,\alpha\,(b + h\,tg\,\alpha)}{(b + 2\,h\,tg\,\alpha)^2} =$$

$$= 1 - \frac{2\,b\,h\,tg\,\alpha + 2\,h^2\,tg^2\,\alpha}{b^2 + 4\,b\,h\,tg\,\alpha + 4\,h^2\,tg^2\,\alpha}$$

Como el 2.° y 3.er término del denominador del quebrado tienen respectivamente valor doble que los términos del numerador, y todos ellos son positivos, el denominador es mayor que el numerador, o sea la fracción es menor que la unidad. La derivada es entonces siempre positiva, es decir que $\frac{\Omega}{l}$ crece con h.

Para abarcar en la discusión todos los casos posibles, hay que observar que si la velocidad U satisface a la ecuación de la pérdida de carga, cuando ésta es la pendiente del lecho el movimiento es uniforme y puede suceder que esta velocidad sea mayor o menor que la crítica U_c. Si es mayor la pendiente del lecho, se llama fuerte; si es menor, suave; si igual, se dice que la pendiente es crítica (1).

Pueden entonces presentarse ríos peraltados en pendiente fuerte o suave, como igualmente torrentes deprimidos. Existen también ríos deprimidos en pendiente suave y torrentes peraltados en pendiente fuerte. Son en cambio absurdo los ríos deprimidos en pendiente fuerte y los torrentes peraltados en pendiente suave. El primero de éstos supone por ser río que $U<U_c$, en contradicción con la condición de pendiente fuerte y ser deprimido que da $U<U_u>U_c$; y el segundo por ser peraltado en pendiente suave requiere $U<U_u<U_c$, en contradicción con la condición de torrente $U>U_c$.

Los puntos característicos de la forma de la curva del eje hidráulico también quedan de manifiesto en la ecuación. En efecto, si h va creciendo hasta hacerse muy grande, J tiende a 0 y U tambien; V_c en cambio tiende a infinito, y por lo tanto $\frac{dh}{ds}$ tiende a valer i. Como $\frac{dh}{ds}$ es la tangente del ángulo que forma el eje hidráulico con la paralela al fondo, quiere decir que el nivel libre tiende a ser horizontal. Así, pues, los ríos peraltados, cuya altura crece indefinidamente, tienen una asíntota horizontal hacia aguas abajo.

Cuando la profundidad h se acerca al valor h_c de la altura crítica, que equivale a decir que en la ecuación U tiende a V_c, la ecuación tiende a ser

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i-J}{0} = \infty$$

es decir, que el eje hidráulico tiende a cortar naturalmente a la profundidad crítica, ya se separe de este nivel (torrente o río peraltados de pendiente fuerte) o tienda a él (torrente o río deprimidos de pendiente suave).

Cuando J tiende a valer i, es decir, que la profundidad h se acerca a la de movimiento uniforme, la inclinación de la tangente a la curva del eje hidráulico tiende a

$$\frac{dh}{ds} = \frac{0}{1-\frac{U^2}{V_c^2}} = 0$$

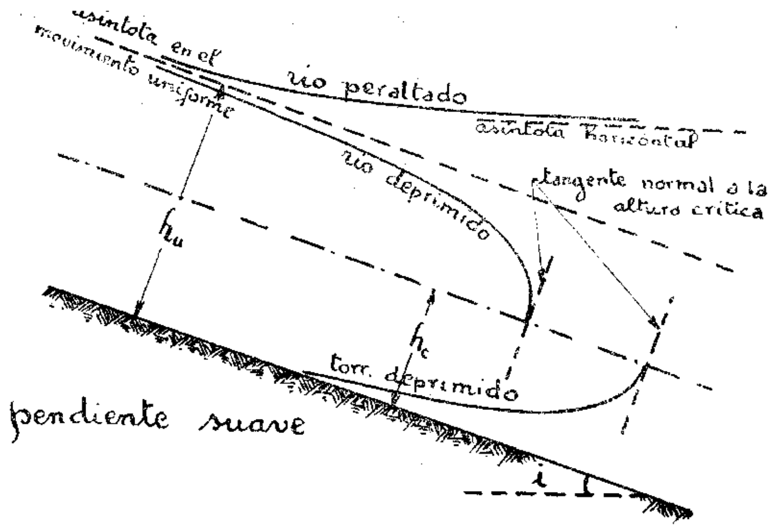
es decir, que los ejes hidráulicos se acercan asintóticamente a la altura de régimen uniforme. Tal cosa sucede en los ríos peraltados y deprimidos de pendiente suave, que se separan de la profundidad de movimiento uniforme y en los torrentes peraltados y deprimidos de pendiente fuerte que se acercan a ese nivel hacia aguas abajo.

Con lo dicho anteriormente queda de manifiesto que la expresión sentada revela las características de las conocidas curvas del eje hidráulico en los seis casos clásicos. (Fig. 4).

La integración de la ecuación diferen-

---

(1) Como nuestra ecuación compara velocidades, hacemos la distinción de clases de pendiente comparando sus valores. La forma corriente y más sencilla, es hacer la comparación de las profundidades. Si la profundidad de movimiento uniforme es mayor que la crítica, la pendiente es suave; si es igual, es pendiente crítica, y si es menor, es fuerte.


asíntota en el movimiento uniforme
río peraltado
asíntota horizontal
río deprimido
tangente normal a la altura crítica
h_u
h_c
torr. deprimido
pendiente suave
i

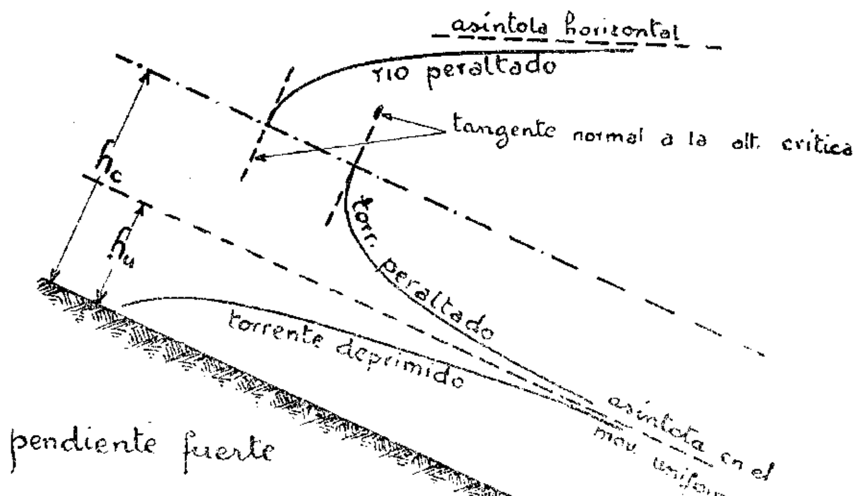

asíntota horizontal
río peraltado
tangente normal a la alt. crítica
h_c
h_u
torr. peraltado
torrente deprimido
asíntota en el mov. uniforme
pendiente fuerte
i

figura 4

cial que se obtiene separando variables, es solamente posible en casos sencillos y en hipótesis restrictivas demasiado irreales. La ecuación de la curva, que aun así se obtiene, es de muy escasa utilidad práctica comparada con su complicación.

Siempre ha de dominar el criterio de efectuar el trazado del eje hidráulico por puntos escalonados como lo indicaron el profesor Salas Edwards (Escurrimiento Variado—edición poligrafiada del año 1918) y Forchheimer (Grundriss der Hydraulik, 1920).