M. Pedrero

Una fórmula en vigas contínuas y su aplicación práctica

INTRODUCCION

En los Anales leí hace poco un interesante estudio sobre vigas continuas, de don Pedro Errázuriz. En él el autor deduce las principales fórmulas interpretando los gráficos de Ritter y en seguida traduce esas fórmulas en abacos para facilitar su aplicación práctica. Me propuse entonces escribir algo sobre vigas contínuas, pero tomando el tema bajo el punto de vista analítico.

Resal, en su obra «Stabilité des Construtions», hace notar la importancia de ciertos coeficientes que dependen únicamente de la luz de los diversos tramos de la viga continua; esos coeficientes los designa con las letras v, ω, β, y γ y su cálculo se hace fácilmente y pueden ser tabulados. Obtenidos estos coeficientes para la viga en estudio, *ya no es necesario recurrir más a las ecuaciones de Clapeyron*. Yo he observado la importancia de otros coeficientes que como los anteriores sólo dependen de la luz de los diversos tramos, y que se deducen fácilmente de los v y ω de Resal; los designo * por α y δ. Entonces yo demuestro que el momento en un apoyo cualquiera de una viga de tramos desiguales y con una distribución cualquiera de fuerzas es dado por la fórmula

$$1) \qquad M = v \Sigma \alpha R + \omega \Sigma \delta S$$

siendo v y ω los valores correspondientes al apoyo considerado; α y δ magnitudes características de cada tramo, y finalmente R y S cantidades que dependen de las fuerzas y de su distribución en cada tramo y que tienen por expresión

$$2) \qquad \begin{cases} R = \Sigma \dfrac{P u (l-u) \left[2 l - u - (l+u)\gamma\right]}{l^2 (1-\gamma)} \\[2ex] S = \Sigma \dfrac{P u (l-u) \left[l + u - (2 l - u)\beta\right]}{l^2 (1-\beta)} \end{cases}$$

* En vigas simétricas basta calcular v, β, α puesto que invertiendo el orden se obtienen los otros coeficientes; en efecto, el ω del último tramo es igual al v del primero, el ω del penúltimo tramo igual al v del segundo tramo.., lo mismo sucede con los demás coeficientes.

Para cada tramo cargado se deberá determinar el valor de R si el tramo está a la derecha del apoyo en que se va a determinar el momento, y el valor de S si el tramo está a la izquierda. La cantidad u en fórmulas (2) representa la distancia de cada fuerza al apoyo de la izquierda. (*).

Veamos ahora algunos casos particulares (**) bastante frecuentes en la práctica. Si algunos tramos llevan carga uniforme completa distinta de un tramo a otro podemos establecer la fórmula correspondiente, reemplazando en fórmulas (2) $p\,d\,u$ en lugar de P; efectuando la integración (***) entre los límites l y cero, obtenemos:

$$\begin{cases} R = \dfrac{p\,l^2}{4} \\ S = \dfrac{p\,l^2}{4} \end{cases}$$

y entonces la ecuación general (1) nos da

$$M = v\,\Sigma\,\alpha\,\frac{p\,l^2}{4} + \omega\,\Sigma\,\delta\,\frac{p\,l^2}{4} \tag{3}$$

La primera Σ corresponde a los tramos cargados a la derecha del apoyo y la segunda a los tramos de la izquierda.

Supongamos que la viga lleva algunos tramos cargados y otros sin carga y que los tramos cargados llevan carga uniforme completa p igual para todos, entonces

$$M = \left[v\,\Sigma\,\alpha\,l^2 + \omega\,\Sigma\,\delta\,l^2 \right] \frac{p}{4} \tag{4}$$

Si suponemos además que la viga es de tramos iguales, se tiene

$$M = \left[v\,\Sigma\,\alpha + \omega\,\Sigma\,\delta \right] \frac{p\,l^2}{4} \tag{5}$$

La aplicación de estas fórmulas es muy sencilla puesto que los α y δ han sido previamente calculados como los v y ω.

Para una viga con cargas concentradas P según una distribución cualquiera

---

* Se podría pensar como el señor Errázuriz, en facilitar el cálculo de R y S por medio de un abaco. Eligiendo como variables $\frac{l}{u}$ y γ obtendríamos rápidamente R. y Si en S reemplazamos u por $1 - u$, deducimos que el mismo abaco podría utilizarse para S.

** En vigas de tramos iguales, exceptuando el primer tramo con $\beta = 0$ y el último con $\gamma = 0$ si los apoyos 1.° y último son simples, los valores de β y γ varían muy poco, entre 0,25 y 0,268 solamente.

*** Para carga uniforme incompleta se hará la integración entre los límites en que actúa dicha carga.

deberá aplicarse ecuaciones (1) y (2). Los casos particulares considerados por Kersten en las tablas de su obra «Construcciones de hormigón armado» (traducción española) pág. 775, dan

$$R = S$$

y los coeficientes β y γ se eliminan; así, por ej., el caso de tres fuerzas iguales con

$$u_1 = \frac{l}{4}$$

$$u_2 = \frac{l}{2}$$

$$u_3 = \frac{3}{4}\,l$$

y entonces se obtiene

$$\frac{\Sigma\, u\,(l - u)\,\left[2\,l - u - (l + u)\,\gamma\right]}{l^2\,(l - \gamma)} = \frac{15}{16}\,l$$

Las tablas que yo he calculado y que acompaño al presente estudio permiten resolver no solamente los casos contemplados por Koersten sino también todo problema, cualquiera que sea la distribución de las cargas. Acompaño varios ejemplos para indicar su aplicación.

Sean ahora M_r y M_{r+1} los momentos de apoyo en un tramo cualquiera. El momento en una sección de este tramo a la distancia x del apoyo M_r se obtiene por la relación conocida

$$M_x = M_x{}' + \frac{l - x}{l} \cdot M_r + \frac{x}{l}\,M_{r+1}$$

siendo $M_x{}'$ el momento de flexión producido en la sección por las fuerzas que obran sobre el tramo considerado éste como tramo independiente.

Las longitudes de los diversos tramos se pueden expresar en función de la longitud l de uno de ellos, y así tendremos

$$l_1 = m_1 l$$

$$l_2 = m_2 l$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

y entonces la fórmula (4) queda en la forma

$$M = \left(v\,\Sigma\,\alpha\,m^2 + \omega\,\Sigma\,\delta\,m^2 \right) \frac{p\,l^2}{4}$$

y se anotarán en la tabla los valores αm^2 y δm^2 para cada tramo. Designando estos valores por α' y δ' tendríamos

$$M = \left(\nu \Sigma \alpha' + \omega \Sigma \delta'\right) \frac{p l^2}{4}$$

lo que es muy cómodo para calcular vigas simétricas, caso frecuente en la práctica.

LA VIGA CONTINUA Y EL TEOREMA DE CLAPEYRON

Consideremos una viga continua de n tramos, apoyos de nivel, momentos de inercia constantes y apoyos extremos simples. Supongamos que la viga se prolongue (*) más allá del tramo n y escribamos las ecuaciones de Clapeyron en el caso que los n tramos no lleven cargas:

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} 2(l_1+l_2)M_1+l_2M_2=0 \\ l_2M_1+2(l_2+l_3)M_2+l_3M_3=0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ l_{n-1}M_{n-2}+2(l_{n-1}+l_n)M_{n-1}+l_nM_n=0 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{array}\right.$$

Se deduce inmediatamente de las ecuaciones anteriores que todos los momentos $M_2, M_3, \ldots, M_n$ son proporcionales a M_1, es decir, al momento del segundo apoyo de la viga. Esta propiedad permite determinar los puntos fijos o focos de la izquierda de cada tramo. En efecto, llevando (fig. 1) longitudes

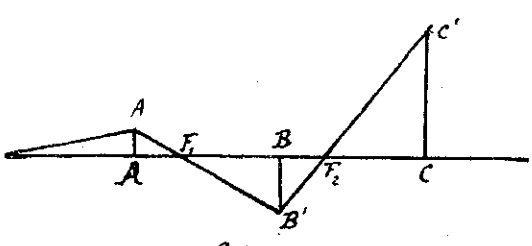


fig 1

$$AA' = 1$$

$$BB' = \frac{M_2}{M_1} v_2$$

$$CC' = \frac{M_3}{M_1} v_3$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Estas cantidades $v_2, v_3, v_4, \ldots v_n$ se calculan fácilmente. En efecto, la primera de las ecuaciones (6) nos da

(*) Se obtiene así una de las series de Resal, la de los v que satisfacen a las ecuaciones (6). Se nota que la última ecuación escrita de la serie lleva tres términos.

$$v_2 = \frac{M_2}{M_1} = -\frac{2\,(l_1+l_2)}{l_2} = BB'$$

La segunda de las ecuaciones (6) de Clapeyron se puede escribir dividiendo por M_1

$$l_2 + 2\,(l_2+l_3)\,\frac{M_2}{M_1} + l_3\,\frac{M_3}{M_1} = 0$$

Reemplazando en esta ecuación el valor $\frac{M_2}{M_1}$ obtenemos entonces el valor de $\frac{M_3}{M_1}$. Dividiendo la tercera ecuación (6) por M_1 y reemplazando en ella los valores de $\frac{M_2}{M_1}$ y $\frac{M_3}{M_1}$ obtenemos $\frac{M_4}{M_1}$ y así sucesivamente.

Uniendo ahora A′ con B′ obtenemos el punto fijo o foco F_1; uniendo B′ con C′ se deduce el foco F_2 y continuando de la misma manera obtenemos así todos los focos de la izquierda de cada tramo. Supongamos ahora que trazado el gráfico de los v queremos ahora el momento producido en una sección cualquiera de la viga de n tramos, suponiendo sólo cargados los tramos a la derecha del considerado. Bastará entonces multiplicar la ordenada interceptada en la línea quebrada de los v por el momento M_1', es decir, por el momento producido en el segundo apoyo por los tramos cargados, y tenemos (fig. 2) para el momento en la sección considerada

7) $$M = \overline{mn}\cdot M_1'$$

En efecto tenemos según (fig. 2).

$$aC = v_m$$
$$bD = v_{m+1}$$
$$CC' = M'_m$$
$$DD' = M'_{m+1}$$

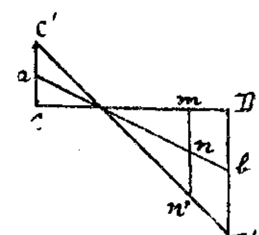


fig 2

Las rectas a b y C′ D′ pasan por el foco de la izquierda del tramo CD. Se deduce

8) $$\frac{mn'}{DD'} = \frac{mn}{bD} = \frac{mn}{v_{m+1}}$$

pero según lo dicho anteriormente

$$v_{m+1} = \frac{M_{m+1}}{M_1} = \frac{M'_{m+1}}{M'_1} = \frac{DD'}{M_1'}$$

de donde

$$DD' = v_{m+1} \cdot M'_1$$

y reemplazando en (8) obtenemos

$$m\,n' = \overline{m\,n} \cdot M_1'$$

Pero $m\,n'$ es el momento M producido por las cargas de los tramos a la derecha del considerado y la relación (7) queda pues demostrada; la escribiremos en la forma

$$M = \xi M_1'$$

El problema se reduce entonces a determinar la expresión general del momento M_1' producido en el segundo apoyo por un sistema de cargas que actúan en los tramos de la derecha del considerando. El momento producido por un tramo de luz l con carga uniforme completa p en el apoyo de la izquierda del tramo, tiene por expresión (Véase Resal)

$$\frac{p\,l^2}{4}\;\frac{\beta'(1-\gamma')}{(1-\beta'\gamma')}$$

Los valores de β' y γ' son correspondientes al tramo cargado. Luego el momento producido en el segundo apoyo de la viga continua será

$$\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \cdots \frac{p\,l^2}{4}\;\frac{\beta'(1-\gamma')}{(1-\beta'\gamma')}$$

siendo β_1 el valor correspondiente al 2.º tramo. β_2 el correspondiente al tercer tramo y así sucesivamente. Se tiene

$$\beta_1 = -\frac{1}{v_2} \qquad \beta_4 = -\frac{v_4}{v_5}$$

$$\beta_2 = -\frac{v_2}{v_3} \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\beta_3 = -\frac{v_3}{v_4}$$

y reemplazando entonces los valores de β:

$$\frac{p\,l^2}{4}\;\frac{(1-\gamma')}{(1-\beta'\gamma')\,v'}$$

siendo v' el v correspondiente al apoyo de la derecha del tramo cargado. Ese momento producido en el 2.° apoyo puede ser positivo o negativo. Designemos

$$\alpha = \frac{1-\gamma'}{(1-\beta'\gamma')\,v'}$$

El coeficiente α *es positivo si el orden del tramo cargado* es un número impar y negativo si de orden par. Por consiguiente podemos escribir para el momento en una sección cualquiera de un tramo sin carga producido por tramos con carga uniforme completa situado a la derecha del tramo considerado

$$M = \zeta\,\Sigma\,\alpha\,\frac{p\,l^2}{4} \qquad 9)$$

siendo ζ la ordenada en la línea quebrada de los v.

Consideremos ahora las ecuaciones de Clapeyron (6) y supongamos que el momento del último apoyo de la viga de n tramos sea cero

$$M_n = 0$$

y que la viga se prolongue de derecha a izquierda más allá del primer apoyo. La última ecuación (6) queda entonces en la forma

$$l_{n-1}\,M_{n-2} + 2\,(l_{n-1} + l_n)\,M_{n-1} = 0$$

y la primera de las ecuaciones (6) se escribe entonces

$$l_1\,M_0 + 2\,(l_1 + l_2)\,M_1 + l_2\,M_2 = 0$$

Son las únicas modificaciones que tenemos que hacer en las ecuaciones (6). Se deduce entonces de estas ecuaciones así modificadas que todos los momentos M_1, M_2........ son proporcionales al momento M_{n-1} que es el momento *en el penúltimo apoyo.*

La última de las ecuaciones (6) modificada nos da

$$\frac{M_{n-2}}{M_{n-1}} = -\frac{2\,(l_{n-1} + l_n)}{l_{n-1}}$$

cantidad que designamos por ω_2

$$\omega_2 = \frac{M_{n-2}}{M_{n-1}}$$

Reemplazando este valor en la penúltima de las ecuaciones (6) tenemos

$$\omega_3 = \frac{M_{n-3}}{M_{n-1}}$$

y llevando ω_2 y ω_3 en la antepenúltima de las ecuaciones (6) deducimos

$$\omega_4 = \frac{M_{n-4}}{M_{n-1}}$$

y así sucesivamente. Tendremos así la línea quebrada de los ω (fig. 3) llevando en el penúltimo apoyo una longitud

$$HH' = 1$$

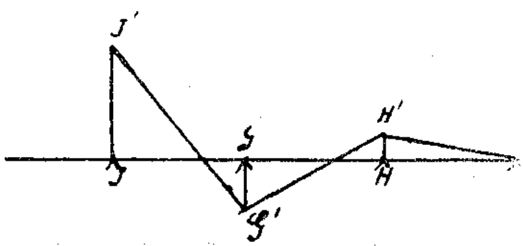


fig 3

y en los demás apoyos

$$G G' = \omega_2 = \frac{M_{n-3}}{M_{n-1}}$$

$$J J' = \omega_3 = \frac{M_{n-4}}{M_{n-1}}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Esta línea quebrada de los ω nos da los focos o puntos fijos de la derecha de cada tramo: f_1, f_2, ...

Siguiendo ahora un razonamiento idéntico al que hemos hecho respecto a la línea de los ν llegaremos a demostrar que el momento producido por un tramo con carga uniforme completa en el penúltimo apoyo tiene por expresión

$$\gamma_1 \cdot \gamma^2 \cdot \gamma_3 \cdots \frac{p\, l^2}{4} \; \frac{(1-\beta')\,\gamma'}{(1-\beta'\gamma')}$$

siendo β' y γ' los correspondientes al tramo cargado y

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\omega_2} \quad \text{penúltimo tramo}$$

$$\gamma_2 = -\frac{\omega_2}{\omega_3} \quad \text{antepenúltimo tramo}$$

$$\gamma_3 = -\frac{\omega_3}{\omega_4}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

Reemplazando estos valores de γ obtenemos

$$\frac{p\,l^2}{4} \cdot \frac{1-\beta'}{(1-\beta'\,\gamma')\,\omega'}$$

siendo ω' el valor de ω correspondiente al apoyo de la izquierda del tramo cargado. Designando

$$\delta = \frac{(1-\beta')}{(1-\beta'\,\gamma')\,\omega'}$$

podemos escribir para el momento producido en el penúltimo apoyo

$$\delta\,\frac{p\,l^2}{4}$$

siendo δ *positivo si el orden del tramo cargado es impar contando los tramos de derecha a izquierda.*

Así, el momento producido en el penúltimo apoyo tiene el mismo signo de δ.

El momento producido en una sección cualquiera de un tramo sin carga, por tramos a la izquierda con carga uniforme completa, será entonces

$$10) \qquad M' = \zeta' \Sigma\, \delta\, \frac{p\,l^2}{4} \qquad \left[\begin{array}{l}\zeta' \text{ ordenada en} \\ \text{la línea de los } \omega\end{array}\right]$$

Luego el momento en una sección cualquiera de un tramo sin carga, producido por cargas en los tramos de la derecha y de la izquierda con carga uniforme completa, se obtendrá sumando ecuaciones (9) y (10)

$$11) \qquad M'' = \zeta \Sigma\, \alpha\, \frac{p\,l^2}{4} + \zeta' \Sigma\, \delta\, \frac{p\,l^2}{4}$$

Hemos supuesto que la sección se toma en un tramo sin carga; si ahora suponemos que el tramo lleva cargas, tendremos que agregar a la expresión el momento producido por estas cargas en la sección considerada y tendríamos entonces

$$12) \qquad M''' = M_\chi + \zeta \Sigma\, \frac{\alpha\, p\,l^2}{4} + \zeta' \Sigma\, \delta\, \frac{p\,l^2}{4}$$

La primera Σ sólo incluye los tramos cargados a la derecha de la sección considerada; la segunda Σ los tramos cargados de la izquierda.

MOMENTO EN UN APOYO CUALQUIERA DE UNA VIGA CONTINUA CON CARGA UNIFORME COMPLETA EN ALGUNOS TRAMOS

A cada apoyo corresponde un v y un ω, y entonces

$$\zeta = v$$
$$\eta' = \omega$$

y la ecuación anterior nos da para el momento en un apoyo cualquiera

$$13) \qquad M_r = v \Sigma \frac{\alpha p l^2}{4} + \omega \Sigma \delta \frac{p l^2}{4}$$

la primera suma para los tramos de la derecha del apoyo, la segunda para los tramos de la izquierda.

MOMENTO EN UN APOYO CUALQUIERA DE UNA VIGA CONTINUA PARA UNA DISTRIBUCIÓN CUALQUIERA DE CARGAS

Es muy fácil * ahora tratar el caso de cargas concentradas. Se obtiene entonces para el momento de un apoyo cualquiera:

$$14) \qquad \left\{ \begin{aligned} M_r &= v \Sigma \alpha R + \omega \Sigma \delta S \\ R &= \Sigma \frac{P u (l-u)\left[2l - u - (l+u)\gamma\right]}{l^2 (1-\gamma)} \\ S &= \Sigma \frac{P u (l-u)\left[l + u - (2l-u)\beta\right]}{l^2 (1-\beta)} \end{aligned} \right.$$

siendo R y S los valores correspondientes a cada tramo (fig. 4) y u la distancia de las fuerzas al apoyo de la izquierda

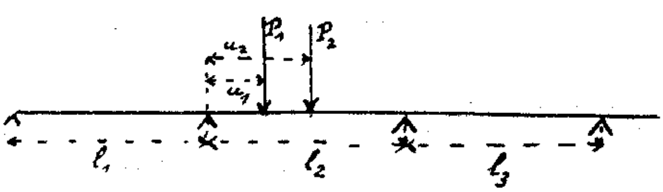


fig 4

* Se considera un tramo de la viga continua con carga concentrada P; las expresiones de los momentos en los apoyos de la izquierda y de la derecha del tramo cargado son dadas por Resal. Se sigue después una demostración análoga a la que yo he dado para tramos con carga uniforme completa.

Se ve entonces que una vez determinados los coeficientes v, ω, α, δ, β, γ, que dependen * sólo de la luz de los tramos de la viga continua, y cuya determinación es fácil, se obtiene sin dificultad el momento en un apoyo cualquiera por las fórmulas generales (14). Yo he calculado las tablas para vigas continuas de cinco, cuatro, tres y dos tramos iguales e indico a continuación su empleo con varios ejemplos. Ellos permiten calcular los momentos de apoyo para cualquiera distribución de cargas.

Vamos a establecer ** ahora un teorema para el caso de fuerzas simétricas. Si en un tramo obran fuerzas simétricas respecto a *l* mitad del tramo, se tendrá

$$R = S$$

y estas cantidades serán independientes de β y γ. Para demostrarlo, consideremos dos fuerzas iguales y simétricas P; sea u la distancia de la primera al apoyo de la izquierda y para la segunda, por ser simétrica, se tendrá $u' = l - u$. Obtenemos entonces para R

$$R = \frac{3\,Pu\,(l-u)}{l}$$

Reemplazando análogamente en la expresión de S se obtiene

$$R = S$$

Por consiguiente, en el caso de una distribución cualquiera de cargas como la figura 5, siempre que haya simetría respecto a la mitad del tramo se tendrá también R = S y estas cantidades serán independientes de β y γ.

fig. 5

Esfuerzos de corte.—Consideremos una sección a la distancia χ del apoyo. Sean M_r y M_{r+1} los momentos de apoyo de la izquierda y derecha del tramo; entonces el esfuerzo de corte en la sección a la distancia χ tiene por expresión

$$V_\chi = \frac{M_{r+1} - M_r}{l} + \frac{p\,(l - 2\chi)}{2}$$

* En una nota en la introducción de este estudio hemos ya indicado que para vigas simétricas basta calcular tres coeficientes v, β, α y para obtener los otros basta invertir el orden.

** Las tablas de Roersten para vigas continuas contienen numerosos ejemplos de cargas concentradas simétricas.

Supongamos que el tramo lleve una carga uniformemente repartida completa, sean α' y δ' los coeficientes para este tramo y designamos como anteriormente $\Sigma\,\alpha$ la suma de los coeficientes α para los tramos que estén cargados a la derecha, por $\Sigma\,\delta$ la que se refiere a los tramos cargados a la izquierda, luego tenemos

$$M_r = \left[v_r\,\Sigma\,\alpha + \omega_r\,\Sigma\,\delta + v_r\,\alpha'\right]\frac{p\,l^2}{4}$$

$$(M_{r+1} = (v_{r+1}\Sigma\alpha + \omega_{r+1}\Sigma\delta + \omega_{r+1}\delta')\ \frac{p\,l^2}{4}$$

de donde

$$M_{r+1} - M_r = \left[(v_{r+1} - v_r)\Sigma\alpha + (\omega_{r+1} - \omega_r)\Sigma\delta - v_r\,\alpha' + \omega_{r+1}\delta'\right]\frac{p\,l^2}{4}$$

Si el tramo no lleva carga se obtiene

$$M_{r+1} - M_r = \left[(v_{r+1} - v_r)\Sigma\alpha + (\omega_{r+1} - \omega_r)\Sigma\delta\right]\frac{p\,l^2}{4}$$

y el esfuerzo de corte será

$$V = \left[(v_{r+1} - v_r)\Sigma\alpha + (\omega_{r+1} - \omega_r)\Sigma\delta\right]\frac{p\,l}{4}$$

Para determinar el máximo del esfuerzo de corte producido por los otros tramos cargados en un tramo cualquiera, es muy fácil emplear la ecuación anterior. Se reemplazará previamente en esta ecuación los valores de v_{r+1}, v_r, ω_{r+1} y ω_r correspondientes en los apoyos. Hecho esto se deduce inmediatamente de la ecuación anterior los signos de α que hay que elegir en la tabla y los de δ para obtener un máximo positivo o negativo, lo que es equivalente a decir qué tramos hay que cargar a derecha e izquierda.

Pero la fórmula anterior es válida para vigas de tramos iguales. Para tramos desiguales se tiene para el esfuerzo de corte

$$V = \left[(v_{r+1} - v_r)\,\Sigma\,\alpha\,l^2 + (\omega_{r+1} - \omega_r)\,\Sigma\,\delta\,l^2\right]\frac{p}{4\,l_r}$$

Momentos de flexión máximos.—Para determinar los momentos de flexión máximos en una sección se puede emplear fácilmente la ecuación 12, puesto que los coeficientes han sido tabulados y los ζ y ζ' se obtienen del gráfico de los v y de los ω.

VIGAS CONTINUAS DE TRAMOS IGUALES. FÓRMULAS PRÁCTICAS

Se calculan los v para la viga de n tramos. Estos mismos valores v sirven para calcular toda viga de un número de tramos inferiores a n. Por consiguiente, convendría tener estos valores de v anotados en un cuadro.

Supongamos una viga de cinco tramos. Anotamos en los apoyos (fig. 6) en la parte superior de la viga los valores de v,

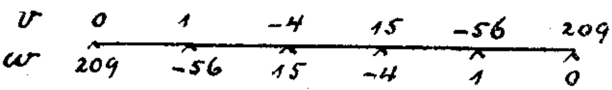


fig 6

Para una viga de tres tramos tendríamos

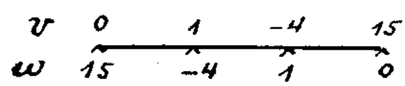


fig 7

Hecho esto se determinan los ω correspoddientes a los apoyos. Para obtenerlos basta invertir el orden de los v y anotarlos debajo de la viga en los apoyos.

Recordemos ahora que los coeficientes α y δ son dados por las expresiones siguientes

$$\alpha = \frac{1-\gamma'}{(1-\beta'\gamma')\,v'}$$

$$\delta = \frac{1-\beta'}{(1-\beta'\gamma')\,\omega'}$$

Pero sabemos que en toda viga de tramos iguales los β están comprendidos entre 0,25 y 0,268 para todos los tramos menos para el primer tramo en que $\beta=0$. Lo mismo sucede con los γ de todos los tramos menos para el último tramo con $\gamma=0$. Luego adoptando el valor medio $\beta=\gamma=0{,}259$ obtenemos para los diversos tramos

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{0{,}8}{v'} \\[2ex] \alpha_u = \dfrac{1}{v'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{0{,}8}{v'} \\ \\ \delta_1 = \dfrac{1}{v'} \end{cases}$$

fórmulas en las cuales a_u se refiere al último tramo de la viga si éste lleva cargas, y δ_1 se refiere al primer tramo si éste lleva cargas.

Se puede entonces enunciar la siguiente regla: El momento producido en un apoyo cualquiera de una viga de tramos iguales por un tramo con carga uniforme completa colocado a la derecha del apoyo, tiene por expresión

$$M_r = \frac{v_r}{v'} \; \frac{x\,0{,}8\,p\,l^2}{4} = 0{,}20\,\frac{v_r}{v'}\,p\,l^2$$

siendo v_r el valor correspondiente del apoyo en que se va a determinar el momento y v' el valor de v del apoyo de la derecha del tramo cargado. Si el tramo cargado es el último de la viga, deberá emplearse la fórmula

$$M_r = 0{,}25\,\frac{v_r}{v'}\,p\,l^2$$

Así, por ejemplo, el momento producido en el tercer apoyo de una viga de cinco tramos, nos da si el 5.° tramo lleva carga uniforme completa

$$M_r = -\frac{0{,}25 \times 4}{209}\,p\,l^2$$

$$= -0{,}00478\,p\,l^2$$

Para tramos cargados a la izquierda del apoyo, el momento producido por un tramo con carga uniforme completa en dicho apoyo, es

$$M_r = \frac{0{,}20\,\omega_r}{\omega'}\,p\,l^2$$

pero si el tramo cargado es el 1.° de la viga

$$M_r = \frac{0{,}25\,\omega_r}{\omega'}\,p\,l^2$$

siendo ω_r el ω del apoyo en que se va a determinar el momento y ω' el ω correspondiente al apoyo de la izquierda del tramo cargado.

Así, por ejemplo, el momento producido en el tercer apoyo de una viga de cinco tramos iguales, si el primer tramo lleva carga uniforme completa, es

$$M_r = \frac{0,25 \times 15}{209} p\, l^2$$

$$M_r = 0,0179\, p\, l^2$$

El método de cálculo anterior es muy sencillo y muy exacto.

Consideremos ahora el caso de *cargas concentradas*. En una forma análoga se deduce fácilmente la fórmula

$$M_r = v_r \Sigma \frac{R'}{v} + \omega_r \Sigma \frac{S'}{\omega}$$

siendo $\Sigma \frac{R'}{v}$ correspondientes a los tramos cargados a la derecha y $\Sigma \frac{S'}{\omega}$ a los tramos a la izquierda del apoyo.

Los valores de R′ se calcularán por la fórmula

$$R' = 1,86\, \Sigma \frac{Pu\,(l - u)\,(l - 0,72\, u)}{l^2}$$

menos para el último tramo de la viga para el cual debe aplicarse la fórmula

$$R' = \Sigma \frac{Pu\,(l - u)\,(2\, l - u)}{l^2}$$

Los valores de S′ se calcularán por la fórmula

$$S' = 0,516\, \Sigma \frac{Pu\,(l - u)\,(l + 2,6\, u)}{l^2}$$

menos para el primer tramo, para el cual

$$S' = \Sigma \frac{Pu\,(l - u)\,(l + u)}{l^2}$$

Determinamos el momento en el 2.° apoyo de una viga de cinco tramos para la solicitación siguiente:

1er. tramo. Una fuerza P_1 a la distancia del apoyo de la izquierda

$$u_1 = \frac{l}{3}$$

3er. tramo. Cargas P_2 y P_3 cuyas distancias al apoyo de la izquierda son

$$u_2 = \frac{1}{2}$$

$$u_3 = \frac{1}{3}$$

Para el 2.° apoyo obtenemos (fig. 6)

$$v_r = 1$$
$$\omega_r = -56$$

1er. tramo

$$S' = \frac{8}{27} P_1 l$$

$$\frac{\omega_r}{\omega} S' = -\frac{56 \times 8}{209 \times 27} P_1 l = -0{,}079 P_1 l$$

3er. tramo

$$R' = 0{,}298 P_2 l + 0{,}316 P_3 l$$

$$v_r \frac{R'}{v} = 0{,}0197 P_2 l + 0{,}020 P_3 l$$

Luego

$$M_r = -0{,}079 P_1 l + 0{,}0197 P_2 l + 0{,}020 P_3 l$$

En los ejemplos dados a continuación indicamos la aplicación de las fórmulas generales; ellos pueden ser también resueltos por las fórmulas prácticas que acabamos de dar.

Ejemplo I.—Determinar el momento en el segundo apoyo de una viga de cinco tramos iguales con carga uniforme completa en todos los tramos.

Según la tabla se tiene para el segundo apoyo

$$v = 1$$
$$\omega = -56$$

Hay un solo tramo cargado a la izquierda, el 1er. tramo cuyo valor de δ según la tabla es

$$\delta = 0{,}00478$$

A la derecha tenemos cuatro tramos cargados y cuyos valores de α son según la tabla

2.° tramo $\alpha_1 = -0,196$
3er. tramo $\alpha_2 = 0,0536$
4.° tramo $\alpha_3 = -0,0144$
5.° tramo $\alpha_4 = 0,00478$

Se obtiene entonces

$$\Sigma\,\delta = 0,00478$$
$$\Sigma\,\alpha = -0,1096$$

y reemplazando en fórmula 5

$$M = \left[v\,\Sigma\,\alpha + \omega\,\Sigma\,\delta\right]\frac{pl^2}{4}$$

obtenemos

$$M_1 = -\,0,105\;pl^2$$

Ejemplo II.—Determinar el momento en el 3er. apoyo para la misma viga del ejemplo anterior, pero solamente los tramos 1.°, 3.° y 5.° con carga uniforme completa igual a *p*.

Para el tercer apoyo la tabla nos da

$$v = -4$$
$$\omega = 15$$

A la izquierda tenemos sólo el 1er. tramo cargado luego

$$\Sigma\,\delta = 0,00478$$

A la derecha tenemos:

3er. tramo $\alpha = 0,0536$
5.° » $\alpha = 0,00478$

luego

$$\Sigma\,\alpha = 0,05838$$

y aplicando la misma fórmula que en el ejemplo anterior obtenemos

$$M = -\,0,040\;pl^2$$

Ejemplo III.—Determinar el momento en el 3er. apoyo de la viga continua de cinco tramos iguales en el caso siguiente:

1er. tramo con carga uniforme completa p m/c
3er. tramo con carga uniforme completa p' m/c
5.° tramo con carga uniforme completa p m/c

Aplicamos fórmula 3

$$M = \upsilon \Sigma \alpha \frac{p l^2}{4} + \omega \Sigma \delta \frac{p l^2}{4}$$

Para el 3.er apoyo tenemos segnn tabla

$$\upsilon = -4$$
$$\omega = 15$$

A la izquierda del tercer apoyo sólo tenemos el primer tramo cargado, luego

$$\delta = 0{,}00478$$
$$\Sigma \delta \frac{p l^2}{4} = 0{,}00478 \frac{p l^2}{4}$$

A la derecha tenemos el tercer y 5.° tramo cargados cuyos valores de α según tabla son

3er tramo	$\alpha = 0{,}0536$
5.° tramo	$\alpha = 0{,}00478$

luego

$$\Sigma \alpha \frac{p l^2}{4} = \frac{0{,}0536\ p' l^2}{4} + \frac{0{,}00478}{4}\ p l^2$$

luego reemplazando ahora en fórmula 3, obtenemos para el momento en el tercer apoyo

$$M = 0{,}0131\ p\ l^2 - 0{,}0536\ p'\ l^2$$

Ejemplo IV.—Viga de cinco tramos iguales con la solicitación siguiente. Determinar el momento en el 2.° apoyo.

1er. tramo. Una fuerza concentrada P_1 a la distancia del apoyo de la izquierda

$$u_1 = \frac{l}{3}$$

3er. tramo con fuerzas concentradas P_2 y P_3 y cuyas distancias al apoyo de la izquierda de este tramo son respectivamente

$$u_2 = \frac{l}{2}$$

$$u_3 = \frac{l}{3}$$

Aplicaremos fórmulas generales (1) y (2). Para el 2.° apoyo, según tabla, se tiene

$$v = 1$$
$$\omega = -56$$

Para el primer tramo $\beta = 0$ y entonces fórmulas (2) nos dan

$$S = 0{,}29\ P_1\ l$$

Según tabla

$$\delta = 0{,}00478$$

luego

$$\Sigma\ \delta\ S = 0{,}00478 \times 0{,}29 \times P_1\ l$$
$$\omega\ \Sigma\ \delta\ S = -56 \times 0{,}00478 \times 0{,}29\ P_1\ l$$

Para el 3er. tramo fórmulas (2) nos dan

$$R_2 = 0{,}37\ P_2\ l$$
$$R_3 = 0{,}39\ P_3\ l$$

Según tablas para el 3er. tramo

$$\alpha = 0{,}0536$$

luego

$$\Sigma\ \alpha\ R = 0{,}0536\ (0{,}37\ P_2\ l + 0{,}39\ P_3\ l)$$
$$v\ \Sigma\ \alpha\ R = 0{,}0198\ P_2\ l + 0{,}0209\ P_3\ l$$

y reemplazando ahora en fórmula (1) y efectuando los cálculos, obtenemos para el momento en el 2.° apoyo

$$M = (-0{,}077\ P_1 + 0{,}0198\ P_2 + 0{,}0209\ P_3)\ l$$

Ejemplo V.—Resolver el ejemplo I por el método analítico indicado por Resal.

Tenemos entonces conforme a las anotaciones de fig. 8 para los momentos producidos en el 2.° apoyo por los diversos tramos cargados

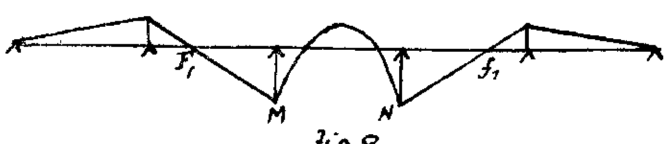


fig. 8

1er. tramo cargado $-\dfrac{\gamma_1\,(1-\beta_0)}{(1-\beta_0\,\gamma_1)}\ \dfrac{p\,l^2}{4}$

2.° tramo cargado $- \dfrac{\beta_1 (1 - \gamma_3)}{1 - \beta_1 \gamma_3} \dfrac{p\, l^2}{4}$

3er. tramo cargado $+ \dfrac{\beta_1 \beta_2 (1 - \gamma_2)}{(1 - \beta_2 \gamma_2)} \dfrac{p\, l^2}{4}$

4.° tramo cargado $- \dfrac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 (1 - \gamma_1)}{(1 - \beta_3 \gamma_1)} \dfrac{p\, l^2}{4}$

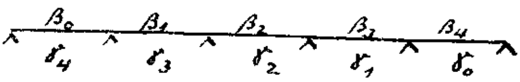


fig 9

5.° tramo cargado $+ \dfrac{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4 (1 - \gamma_0)}{(1 - \beta_4 \gamma_0)} \dfrac{p\, l^2}{4}$

Reemplazando ahora los β y γ de la tabla que yo he calculado y sumando los resultados se llega finalmente a obtener para el momento en el 2.° apoyo

$$M = -0{,}105\, p\, l^2$$

Se sabe que gráficamente se determina el efecto de un tramo cargado sobre los otros por la fig. 9 uniendo M y N con los focos de izquierda y derecha respectivamente.

Se ve entonces que el método indicado en el ejemplo I es mucho más corto. Esto demuestra claramente que conviene más calcular previamente los α y δ. En vigas simétricas basta sólo calcular los α e invertir el orden en la tabla para obtener los δ.

VIGAS CONTINUAS DE MOMENTO DE INERCIA VARIABLES

En vigas continuas de momento de inercia variable se puede establecer la misma ecuación 1, pero entonces los coeficientes v, ω, β, γ, α, δ representan otras funciones de la longitud de los tramos que el caso de vigas de momento de inercia constante; lo mismo sucede con R y S que tienen entonces una expresión distinta de ecuaciones (2).

NOTA.—En todas las fórmulas yo he adoptado la notación de Resal con excepción de los momentos para los cuales este autor emplea otra notación. En lugar de los β se puede introducir la distancia del foco de la izquierda al apoyo de la izquierda y se tiene

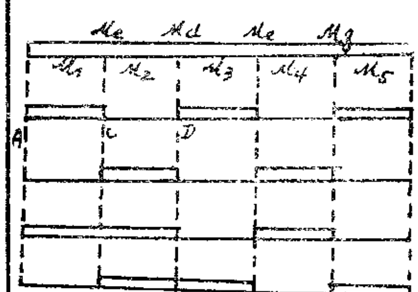
$$\zeta = \frac{\beta}{1 + \beta}\, l$$

Para γ y la otra distancia focal resulta una fórmula análoga. Cada β de un tramo está ligado al β del tramo siguiente por relaciones que da Resal.

VIGA DE CINCO TRAMOS IGUALES *

	1er. tramo		2.° tramo		3.er tramo		4.° tramo		5° tramo	
υ	0	1	1	—4	—4	15	15	—56	—56	209
ω	209	—56	—56	15	15	—4	—4	1	1	0
β	0		0,25		0,267		0,268		0,268	
γ	0,268		0,268		0,267		0,25		0	
α			—0,196		0,0536		—0,0144		0,00478	
δ	0,00478		—0,0144		0,0536		0,194			

APLICACIONES.—TRAMOS CON CARGA UNIFORME COMPLETA



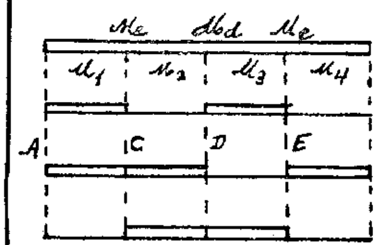
Distribución de las cargas	Momento en los tramos			Momento en los apoyos				Factores	Reacciones			Factores
	M_1	M_2	M_3	M_c	M_d	M_e	M_f		A	C	D	
	—0,078	0,0332	0,0462	—0,105	—0,079	—0,079	—0,105	gl^2	0,395	1,132	0,974	gl
	0,100	—0,046	0,0855	—0,053	—0,040	—0,040	—0,053	pl^2	0,447			pl
	—0,026	0,079	—0,0395	—0,053	—0,040	—0,040	—0,053	pl^2	—0,053			pl
				—0,119	—0,022	—0,044	—0,051	pl^2		1,21		pl
				—0,035	—0,111	—0,020	—0,057	pl^2			1,17	pl

* En la parte que se refiere a aplicaciones, he adoptado la forma de las tablas de Koersten (Construcciones de hormigón armado, traducción española, pág. 775), que es muy cómoda.

VIGA DE CUATRO TRAMOS IGUALES

	1er. tramo		2.° tramo		3er. tramo		4.° tramo	
υ	0	1	1	—4	—4	15	15	—56
ω	—56	15	15	—4	—4	1	1	0
β	0		0,25		0,267		0,268	
γ	0,268		0,267		0,25		0	
α			—0,196		0,0536		—0,0178	
δ	—0,0178		—0,0536		—0,196		0	

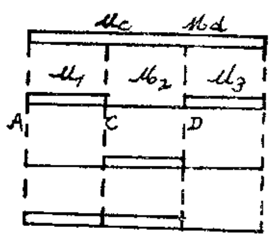
APLICACIONES.—LOS TRAMOS CON CARGA UNIFORME COMPLETA

Distribución de las cargas	Momentos en los tramos				Momento en los apoyos			Factores	Reacciones			Factores
	M_1	M_2	M_3	M_4	M_c	M_d	M_e		A	C	D	
	0,079	0,036	0,036	0,079	--0,107	--0,0714	--0,107	g l²	0,39	1,14	0,93	g l
	1,100	--0,045	0,079		--0,054	--0,036	--0,054	p l²	0,45			p l
					--0,121	--0,018	--0,058	p l²		1,22		p l
					--0,036	--0,107	--0,036	p l²			1,14	p l

VIGA DE TRES TRAMOS IGUALES

	1er. tramo		2.o tramo		3er. tramo	
ν	0	1	1	—4	—4	15
ω	15	—4	—4	1	1	0
β	0		0,25		0,267	
γ	0,267		0,25		0	
α			—0,20		0,0666	
δ	0,0666		—0,20			

APLICACIONES.—TRAMOS CON CARGA UNIFORME COMPLETA

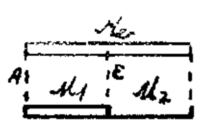


Distribución de las cargas	Momento en los tramos		Momento de apoyo	Factores	Reacciones		Factores
	M_1	M_2	M_C		A	C	
	0,08	0,025	—0,100	$g\,l^2$	0,40	1,1	$g\,l$
	0,101	—0,05	—0,050	$p\,l^2$	0,45		$p\,l$
	—0,025	0,075	—0,050	$p\,l^2$			
			—0,117	$p\,l^2$		1,2	$p\,l$

VIGA DE DOS TRAMOS IGUALES

	1er. tramo		2.° tramo	
v	0	1	1	—4
ω	—4	1	1	0
β	0		0,25	
γ	0,25		0	
α			—0,25	
δ	0,25			

APLICACIONES.—TRAMOS CON CARGA UNIFORME COMPLETA

	Momento en los tramos		Momento de apoyo	Factores	Reacciones		Factores
	M_1	M_2	M_c		A	C	
	0,070	0,07	—0,125	$g\,l^2$	0,375	1,25	g l
	0,096	—0,025	—0,063	$p\,l^2$	0,438		p l