Simplificación de las fórmulas para determinar la emisión del calor en casos industriales

por

Rogelio Antoine

Trataremos de simplificar las fórmulas clásicas de Peclet, Dulong y Petit en sus aplicaciones industriales al transporte y a la emisión del calor.

Consideraremos los casos en que la temperatura del vehículo del calor, es mayor que la del ambiente o del cuerpo a calentar (1).

Las instalaciones de: calefacción central, secadores, humidificación, destilación, etc, etc. en las cualas los cálculos de emisión de calor, son los más importantes utilizan siempre vehículos de calor cuya temperatura excede raras veces 120 °C., y no bajan nunca de 0° C. Estas temperaturas serán por consiguiente los límites de empleo de las fórmulas que estableceremos.

Como trataremos de establecer fórmulas para el uso en la industria, podemos notar que los cuerpos que constituirán, sea la red de cañerías sea las superficies de emisión, tendrán por lo general una forma cilíndrica, y serán de fierro o acero.

---

(1) El caso en que la temperatura del ambiente es mayor que la del vehículo del calor, escapa a nuestro análisis, porque los coeficientes de radiación y convección pueden ser profundamente modificados y que no tenemos más razones para aplicarlos—por ejemplo en el caso que el ambiente sea saturado a una temperatura más elevada que la del cañón que lleva el calor—habrá condensación de agua sobre la superficie exterior del cañón, la distribución de esa condensación sera cualquiera y no podremos emplear ningún coeficiente de radiación ni de convección.

I parte—coeficiente de emisión

Recordaremos que la emisión del calor, de una superficie al ambiente tendrá por valor:

$$Q = S\ K\ (T\text{-}T_1)\ Z \qquad (1)$$

Q= cantidad de calor emitido
S= superficie
K= coeficiente de emisión
T= temperatura de la superficie
T_1= Temperatura del ambiente
Z= El tiempo.

El coeficiente K toma en cuenta, la radiación y la convección.

La parte correspondiente a la radiación es según Peclet, Dulong y Petit, etc.

$$m\ R = \frac{125\left(a^{T} - a^{T_1}\right)}{T\text{-}T_1}\ R \qquad (2)$$

a siendo una constante para todos los cuerpos R el coeficiente de radiación del material que constituye la superficie.

La parte correspondiente a la convección es según los mismos autores.

$$n\ X = 0,55(T\text{-}T_1)^{0,233}\ X \qquad (3)$$

X es función de la forma, la posición y el tamaño de la superficie.

Introduciendo estos valores en la fórmula (1) obtendremos:

$$Q = S\ (T\text{-}T_1)\ Z \left[\frac{125\ R\ (a^{T} - a^{T_1})}{(T\text{-}T_1)} + 0,55\ (T\text{-}T_1)^{0.233}\ X\right] (4)$$

Estudiaremos los términos m y n por los casos que nos interesan o sean los en que T » T_1 con 120° » T » 0°.

Escribamos la expresión

$$x = m - n = \frac{125\ (a^T - a^T{}_1)}{T - T_1}^{0,233} - 0,55\ (T - T_1) \qquad (5)$$

Buscando el máximo de x tendremos que verificar que

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dT} = O\ ; \quad \dfrac{dx}{dT_1} = O\ ; \quad \dfrac{d_2x}{dT_1{}^2} < o\ ; \quad \dfrac{d^2x}{dT_1{}^2} < O \\[2ex] \begin{vmatrix} \dfrac{dx^2}{dT^2} & \dfrac{d^2x}{dT_1 dT} \\[2ex] \dfrac{d^2x}{dT_1 dT_1} & \dfrac{dx^2}{dT^2} \end{vmatrix} > O \end{array}\right\} \qquad (6)$$

tenemos

$$\frac{dx}{dT} = 125 \left[\frac{a^T(\log_e a(T-T_1) - 1) + a^T{}_1 - \dfrac{0,55 \times 1,233}{125} (T-T_1)^{1,233}}{(T-T_1)^2} \right] \qquad (7)$$

$$\frac{dx}{dT_1} = 125 \left[\frac{- a^T{}_1(\log_e a(T-T_1) + 1) + a^T + \dfrac{0,55 \times 0,233}{125} (T-T)^{1,233}}{(T-T_1)^2} \right] \qquad (8)$$

$$\frac{d^2x}{dT^2} = 125 \left[\frac{a^T{}_1(\log_e a(T-T_1) - 1)^2 + 1) + \dfrac{0,767 \times 0,55 \times 0,233}{125} (T-T_1)^{1,233} - 2a^T{}_1}{(T-T_1)^3} \right] \qquad (9)$$

$$\frac{d^2x}{dT_1{}^2} = 125 \left[\frac{- a^{T_1} \left[\log_e a(T-T_1) + 1)^2 + 1 \right] + \dfrac{0,767 \times 0,55 \times 0,233}{125} (T-T_1)^{1,233} + 2a^T}{(T-T_1)^3} \right] \qquad (10)$$

$$\frac{d^2x}{dT.\ dT_1} = 125 \left[\frac{(a^T + a^T{}_1) \log_e a\ (T-T_1) - \dfrac{0,767 \times 0,55 \times 0,233}{125} (T-T_1)^{1,233} - 2(a^T - a^T{}_1)}{(T-T_1)^3} \right] \qquad (11)$$

Según las ecuaciones (7) y (8), tenemos (T-T_1) quedando positivo y finito las condiciones siguientes para que estas expresiones se anulen.

$$a^{T}\left[\log_c a\ (T-T_1)-1\right]+a^{T_1} = \frac{0{,}55 \times 0{,}233}{125}(T-T_1)^{1{,}233} \qquad \text{para (7)}$$

$$a^{T}-a^{T_1}\left[\log_c a\ (T-T_1)+1\right] = -\frac{0{,}55\times 0{,}233}{125}(T-T_1)^{1{,}233} \qquad \text{para (8)}$$

de donde

$$a^{T}(\log_c a\ (T-T_1)-1)+a^{T_1}=a^{T_1}(\log_c a\ (T-T_1)+1)-a^{T}$$

de donde

$$T = T_1$$

Si buscamos el límite de (7) cuando $T_1 \longrightarrow T$ tendremos

$$\lim = \frac{125\, a^{T} \log_c a}{T-T_1} - \frac{125\,(a^{T}\, a^{T_1})}{T-T_1}\ \frac{1}{T-T_1}\ \frac{0{,}55 \times 0{,}233}{(T-T_1)^{0{,}767}}$$

$$\lim = -\frac{0{,}55 \times 0{,}233}{(T-T_1)^{0{,}767}} \longrightarrow \infty$$

Igualmente para (8) tendremos.

$$\lim = -\frac{125\, a^{T_1} \log_c a}{T-T_1} + \frac{125\,(a^{T}-a^{T_1})}{T-T_1}\ \frac{1}{T-T_1} + \frac{0.55\times 0.233}{(T-T_1)^{0{,}767}}$$

de donde $\lim = +\dfrac{0.55\times 0.233}{(T-T_1)^{0{,}707}} \longrightarrow +\infty$

Vemos, pues, que los valores $T=T_1$ que solos podrían anular (7) y (8) simultáneamente no las anulan.

Además podemos verificar que la función (8) será siempre positiva.

En efecto, para que pueda ser negativa tendríamos que poder tener.

$$a^{T_1}(\log_c a\ (T-T_1)+1) > a^{T} \qquad \text{o bien} \qquad (12)$$

$$\log_c a\ (T-T_1) > a^{T-T_1} - 1 \qquad \text{de donde} \qquad (13)$$

$$\log_c a\ (T-T_1) > {}_c \log_c a\ (^{T-T}{}_1) - 1 \qquad \text{de donde} \qquad (14)$$

$$C$$

$$\log_c a\ (T-T_1) - \log_c a\ (T-T') < 1 \qquad (15)$$

derivando y igualando a cero tenemos

$$\log_c a\ (T\text{-}T_1)$$

$$\log_c a\ (T\text{-}T_1) \qquad\qquad -\log_c a = O \qquad \text{d c donde}$$

$$\log_c a\ (T\text{-}T_1)$$

$$C \qquad = 1 \qquad\qquad \text{d c donde}$$

$$(T\text{-}T_1) = O$$

la derivada segunda sería

$$\log_c a\ (T\text{-}T_1)$$

$$\log_c^2 a\ c$$

para $T\text{-}T_1 = 0$ tenemos

$$\log_c a\ (T\text{-}T_1)$$

$\log_c^2 a\ c \qquad = \log_c^2 a$ sea un valor positivo y por consiguiente mínimo de la función sería para $T = T_1$ por ese valor tenemos

$$\log_c a\ (T\text{-}T_1)$$

$$C \qquad -\log_c a\ (T\text{-}T_1) = 1$$

la expresión (15) no será, pues, nunca verificada y por consiguiente (8) será siempre positiva.

El análisis hecho nos muestra que no hay un máximo estricto en el dominio que estudiamos, o bien que no hay en ese dominio un punto en que se pueden verificar las relaciones (6).

Podemos ver ahora que la expresión (7) que es negativa para $T = T_1$ puede por otros valores ser positiva.

Efectivamente, podemos escribir:

$$a^{T}(\log_c a\ (T\text{-}T_1) > a^{T} - a^{T_1} \qquad (16)$$

o bien tomando las notaciones precedentes

$$\log_c a\,(TT_1) > 1 - c^{\log_c a\,(T-T_1)} \qquad (17)$$

de donde

$$\log_c a\,(T\text{-}T_1) + \frac{1}{C^{\log_c a\,(T-T_1)}} > 1 \qquad (18)$$

derivando e igualando a cero

$$\log_c a - \frac{\log_c a}{C^{\log_c a\,(T-T_1)}} = 0$$

le donde $T = T_1$

La derivada segunda será:

$$\frac{\log_c{}^2 a}{C^{\log_c a\,(T-T_1)}}$$

para $T = T_1$ esa expresión es positiva de donde el valor de la función es mínimo y ese valor es

$$\log_c a\,(T\text{-}T_1) + \frac{1}{C^{\log_c a\,(T-T_1)}} = 1$$

de donde la expresión (18) será verificada de donde (7) podrá ser positiva.

Recordándonos que (7) es negativa para $T = T_1$, vemos que tendremos un máximo de la función por cada valor constante de T_1, y que el más grande de esos máximos será el que corresponderá al valor mínimo de T_1 puesto que (8) es siempre positiva,

Como el valor mínimo de T_1 es cero grado Celrus calcularemos el máximo de la función x por este valor y tendremos (7)

$$\frac{125\left[a^T\left(\log_c a\,T - 1\right) + 1 - \frac{0{,}55 \times 0{,}233}{125}\,T^{1{,}233}\right]}{T^2} = 0 \qquad (19)$$

Esta ecuación resuelta por tanteos da para $T = 60°C$ aproximadamente.

El valor de x para $T = 60°C$ es de

$$n = -0{,}153$$

Notamos que el valor de x para $T = T$, es mayor que el encontrado más arriba, pero ese valor no nos interesa porque la transmisión de calor se anula en ese caso.

Necesitamos también calcular el término medio de la función por el caso que contiene el máximo o sea el en que $T_{,} = 0°C$.

$$xm = \frac{125}{T} \int_0^T \frac{a^{\tau} d\tau}{\tau} - \frac{125}{\tau} \int_0^T \frac{d\tau}{\tau} - \frac{0{,}55}{\tau} \int_0^T \tau^{0{,}233} d\tau$$

$$xm = \frac{125}{.T} \left[\left(\log_e a\, T + \frac{\log_e^{2} a\, T^2}{2.\,2.'} + \frac{\log_c^{3} a\, T^{3}}{3.\,3.'} + \ldots \frac{\log_c^{n.\tau\, n} a\, T}{n.\,n.'} \right) \right] - \frac{0{,}55.T^{0{,}233}}{1{,}233}$$

haciendo $T = 120°$ resulta para xm

$$xm = -0{,}0609$$

En las aplicaciones el término R será muy variable, por consiguiente del estado de la superficie, está en efecto aunque se colocaría en un estado perfectamente definido, pulido por ejemplo, sería al fin de poco tiempo en condiciones distintas a las primeras, algunas partes se encontrarán oxidadas, otras habrán vueltas al estado bruto, otras serán manchadas por cuerpos o materias extrañas; polvos: grasas, pintura, etc.

Tenemos a nuestro conocimiento tres valores del coeficiente R para el fierro y según el estado de la superficie

fierro pulido	$R = 0{,}67$
fierro bruto	$R = 2{,}77$
fierro oxidado	$R = 3.36$

El coeficiente X el cual depende del tamaño y de la forma de la superficie va el variar poco (1)

Podemos entonces con los resultados adquiridos, notar que:

El coeficiente R será muy variable.

El coeficiente X será constante por cada caso.

Los términos m y n son casi iguales y sus diferencia mucho menos importantes que las variaciones de R.

En consecuencia de que propondremos:

Adoptar para la ecuación de m y de n la misma fórmula y adoptar la forma

$$m = n = \alpha \, (T\text{-}T_1) \; \beta$$

para simplificar los cálculos transformaremos

α que según Peclet Dulong y Petit=0,55 en 0,50

β que según Peclet Dulong y Petit=0,233 en 0,250

Calculando el máximo de x con estos valores para n obtendremos

$$x \; max = -0{,}115$$

para T=63° C.

Calculando el término medio de x con estos valores para n obtendremos

$$x \, m = -0{,}024$$

valores mejores que los precedentes.

El coeficiente de emisión así transformado y simplificado tomaría entonces la forma

$$K = \frac{(R + X) \quad (T - T_1)^{1/4}}{2}$$

en lugar de $K = \dfrac{125\,R \; (a^T\text{-}a^T}{T\text{-}T_1} + 0{,}55\,X\,(T\text{-}T_1)^{0{,}233}$

(1) Alejamos el caso en que la superficie sería manchada por masas de materiales, cemento, yeso u otro en el punto de deformarse en cual caso no hay más análisis posible.

II. PARTE-COEFICIENTE DE TRANSMISIÓN

Como lo hemos dicho anteriormente, la red de cañería y las superficies de emisión serán por lo general constituídas por cuerpos cilindricos de fierro.

Establezcamos entonces la expresión del coeficiente de transmisión en ese caso

Sea T_1 la temperatura del fluído al interior del cañón

θ la temperatura de la superficie interior del cañón

θ_1 la temperatura de la superficie exterior del cañón

T^1 la temperatura del ambiente

Q la cantidad de calor transmitida

α el coeficiente de absorción

c el coeficiente de conductibilidad del metal

K el coeficiente de emisión

R, γ los radios exteriores e interiores del cilindro.

Podemos escribir

para la cantidad de calor que pasa del fluído a la superficie interior del cañón.

$$Q = 2\pi\gamma\alpha\ (T - \theta) \qquad (20)$$

para la cantidad de calor que emite la superficie exterior del cañón

$$Q = 2\pi\ R\ K\ (\theta_1 - T_1) \qquad (21$$

para la cantidad de calor que atraviesa el metal

$$Q = 2\pi\ \frac{\rho\ d\theta}{d\rho}\ .\ c. \qquad (22)$$

ρ siendo el radio de un anillo imaginario recortado en el espesor del cañón.

$d\theta$ la diferencia elemental de temperatura entre las fachadas interior y exterior del anillo.

De (20) sacamos

$$T\text{-}\theta = \frac{Q}{2\ \pi\ \gamma\ \alpha} \qquad (23)$$

De (22) sacamos

$$\theta - \theta_1 = \frac{Q}{2\pi \cdot c} \log_c \frac{R}{\gamma} \tag{24}$$

De (21) sacamos

$$\theta_1 - T_1 = \frac{Q}{2\pi R \cdot K} \tag{25}$$

Sumando (23) (24) (25) obtenemos

$$T\text{-}T_1 = Q \left(\frac{1}{2\pi \gamma \alpha} + \frac{\log_c \frac{R}{\gamma}}{2\pi c} + \frac{1}{2\pi R K} \right) \tag{26}$$

Si ponemos la cantidad de calor emitida bajo la forma clásica

$$Q = SM\,(T\text{-}T_1) = 2\pi R M\,(T\text{-}T_1) = \frac{2\pi\,(T\text{-}T_1)}{\left(\frac{1}{\gamma \alpha} + \frac{\log c \frac{R}{\gamma}}{C} + \frac{1}{RK} \right)}$$

de donde

$$R M = \frac{1}{\left(\frac{1}{\gamma \alpha} + \frac{\log c \frac{R}{\gamma}}{c} + \frac{1}{R K} \right)}$$

Notamos ahora que:

α es muy grande 800 a 10.000 y más

γ no es muy chico

por consiguiente $\frac{1}{\gamma \alpha}$ es despreciable

$R-\gamma$ igual el espesor del cañón es en general chico, de donde $\frac{R}{\gamma}$ es cerca de 1 de donde $\log_c \frac{R}{\gamma}$ es chico

c. es grande para los metales, de donde $\frac{\log_c \frac{R}{\gamma}}{c}$ es despreciable queda entonces

$$R\,M = \frac{R\,K}{1}$$ de donde el coeficiente de transmisión M

es igual al coeficiente de emisión K (1).
por consiguiente de esas modificaciones hemos reducido la formula

$$\left[\frac{1}{R\left(\frac{1}{Y\alpha}+\log c\,\frac{\frac{R}{Y}}{c}+\frac{1}{\frac{R\,(125\,R(a^{T}-a^{T_1})}{T-T^{1}}}+0{,}55(T-T_1)\,0233\,x\right.}\right]$$

a la fórmula

$$\frac{(R+X)\ (T-T_1)^{1/4}}{2}$$

Notaremos que todo lo que hemos hecho hasta ahora contribuye a aumentar el coeficiente de transmisión, prácticamente se había reconocido que la formula de Pelet, daba valores más chicos que los obvservados (2).

III PARTE

Coeficientes de radiación y de convección.

Adoptaremos sin modificaciones los coeficientes de radiación encontrados por Peclet, Dulont et Petit etc.

Para el coeficiente de convección, notaremos que: según las experiencias recientes de Ch. Eberle, el diámetro tiene sobre la emisión de calor una influencia muy chica, y guardando la forma que le había dado Peclet escribiremos para X.

$$X = 5 + \frac{0{,}02115}{d}$$

(1) Como de mecanique appliquée aux machines - J. Bonleim - Observation de M$^{\underline{r}}_{\ast}$ Longridge - Experiencia sobre caldera Lancasline, el coeficiente M varía más o menos como la raíz cuarta de la combustión, K es sensiblemente igual a M.

(2) E. Hausbrand - Evaporation, condensation, repoidissement.

d = diámetro exterior en metros,

en lugar de la expresión

$$X = 2{,}058 + \frac{0{,}0382}{v} \quad \text{que había encontrado Peclet.}$$

Podemos notar que el número 5 puesto en nuestra fórmula es uno de los coeficientes indicados por Valerius.

La fórmula entera del coeficiente de transmisión se escribiría pues:

$$K = \left[\frac{R + 5 + \dfrac{0{,}02115}{d}}{2}\right] \left[T\text{-}T_1\right]^{1/4}$$

Verificación de la fórmula por la experiencia.

Damos a continuación un cuadro de diversas experiencias y los valores comparativos obtenidos por nuestra fórmula, la de Peclet y una que es una combinación de la de Peclet, la de Valerius y de diversos otros autores.

Coeficientes de Trasmision según nuestra formula en las mismas condiciones

Diametro m/m	Diferencia de Temperatura				
	40 a 50	50 a 60	60 a 70	70 a 80	80 a 90
10 a 33	10,63	11,15	11,63	12,01	12,4
33 a 60	9,5	9,95	10,38	10,74	11,08
60 a 100	9,2	9,66	10,05	10,40	10,75
100 a 150	9,06	9,51	9,92	10,27	10,59
150 i mas	según diametros				

El cuadro 1 es menos los valores dados por nuestra fórmula copiado de Evaporation, condensation et réfroidissement de Hausbrand Ch. Beranger editeur, las columnas 11 y 12 no fueron verificadas.

Coeficientes de Trasmision
segun esperiencias del Dr. Rietschel

Diametro m/m	Diferencia de Temperatura				
	40 a 50	50 a 60	60 a 70	70 a 80	80 i mas
0 a 33	11	11,5	12,0	12,5	12,5
33 a 60	9.5	10,0	10,5	11,0	11,5
60 a 100	9,5	10,0	10,5	10,5	10,5
100 a 150	9,0	9,5	9,5	9.5	9,5
150 i mas	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5

El cuadro (2) da los valores del coeficiente de transmisión en diversos casos, se puede notar en este cuadro, que la preocupación de dar números sencillos, hizo despreciar la exactitud de los coeficientes; sin embargo los coeficientes de Rietschel confirman bien nuestra fórmula, la cual da una aproximación mejor y es mucho más sencilla.