SECCIÓN TÉCNICA

Análisis Armónico

Aplicación de las series de Fourier a las observaciones de las temperaturas medias mensuales de Santiago, recogidas en el Observatorio Astronómico Nacional durante cuarenta años. (*)

POR ISMAEL GAJARDO REYES

(Desde el 1.º de Enero de 1861 hasta el 31 de Diciembre de 1900).

(*Conclusión*).

Empero, no nos hagamos ilusiones, pues para poder desarrollar todo este vasto plan de trabajo, que dejo simplemente esbozado, es menester coordinar muchos esfuerzos y poner en actividad muchas voluntades, esfuerzos y voluntades que no se emplearían inútilmente, porque, después de todo, redundarían en beneficio directo del país y de su prestigio científico, ya que la ciencia es en sí misma una herencia que debe ir constantemente incrementándose.

En efecto, desde los sistemas clásicos de educación de Grecia y Roma, en que predominaba la educación física tendente a formar soldados robustos y ciudadanos aptos para los fines de aquellas sociedades; desde los tiempos griegos posteriores (me refiero a los de Platón y Aristóteles) en que predominó el culto de la educación estética, que daba por resultado la formación del hombre hermoso casi divinizado;

(*) Ver el núm. de Diciembre de 1925,

desde las escuelas utilitarias de Descartes y Locke, continuadas por los filósofos del siglo XVIII; desde el cultivo predominante del gusto literario clásico de los humanistas del renacimiento hasta el predominio del espíritu científico que, desde Diderot hasta Herbert Spencer, ha adelantado en rápida progresión y dado carácter a la ciencia contemporánea, todo es factor, todo es elemento de juicio, todo herencia del pasado que el presente analiza y transforma y adapta, como analizará, transformará y adaptará el porvenir lo que nosotros le leguemos, pese a la constante pretensión de las edades, que creen siempre haber pronunciado o estar pronunciando la última palabra en materia de ciencia, y se califican a sí mismas de científicas por antonomasia con encantadora sencillez.

Así, pues, nada tenemos que temer, para las grandes verdades, del progreso de la ciencia verdadera, cualquiera que sea su campo de acción; nada podrá quebrantar la existencia axiomática de ese *yo* que permanece inmutable al través de las modificaciones, de esa misteriosa substancia permanente que habita nuestra carne sin ser carne, y en la que reside la conciencia del ser inteligente y libre.

Obs, 14 de Diciembre de 1925.

ISMAEL GAJARDO REYES.

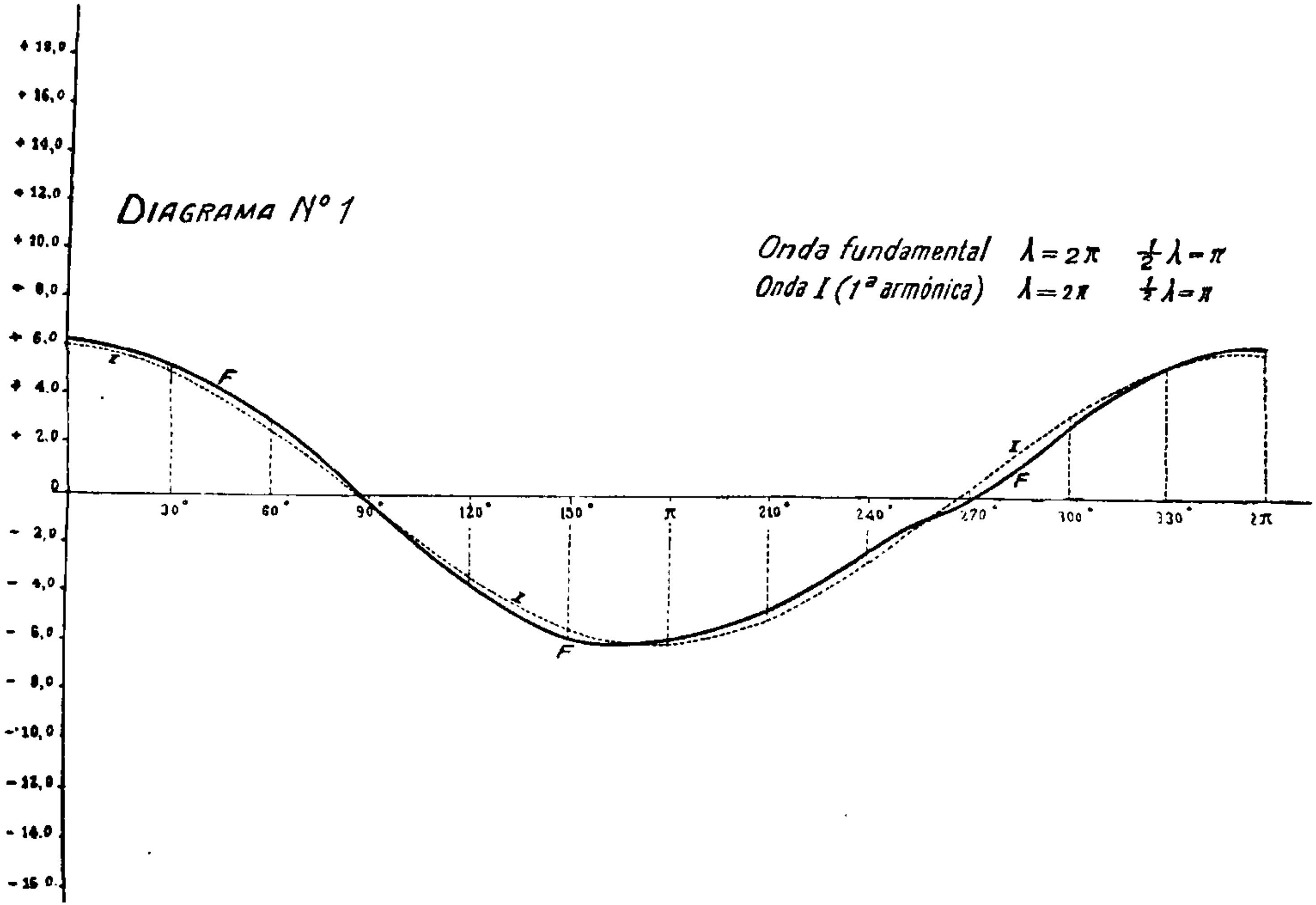


DIAGRAMA Nº 1
Onda fundamental $\lambda = 2\pi$ $\frac{1}{2}\lambda = \pi$
Onda I (1ª armónica) $\lambda = 2\pi$ $\frac{1}{2}\lambda = \pi$
F
I
+ 18,0
+ 16,0
+ 14,0
+ 12,0
+ 10,0
+ 8,0
+ 6,0
+ 4,0
+ 2,0
0
- 2,0
- 4,0
- 6,0
- 8,0
- 10,0
- 12,0
- 14,0
- 16,0
30°
60°
90°
120°
150°
π
210°
240°
270°
300°
330°
2π

DIAGRAMA N° 2

Onda II (2ª armónica) $\lambda = \pi$ $\frac{1}{2}\lambda = \frac{\pi}{2}$

Onda III (3ª armonica) $\lambda = \frac{2\pi}{3}$ $\frac{1}{2}\lambda = \frac{\pi}{3}$

Onda IV (4ª armónica) $\lambda = \frac{\pi}{2}$ $\frac{1}{2}\lambda = \frac{\pi}{4}$

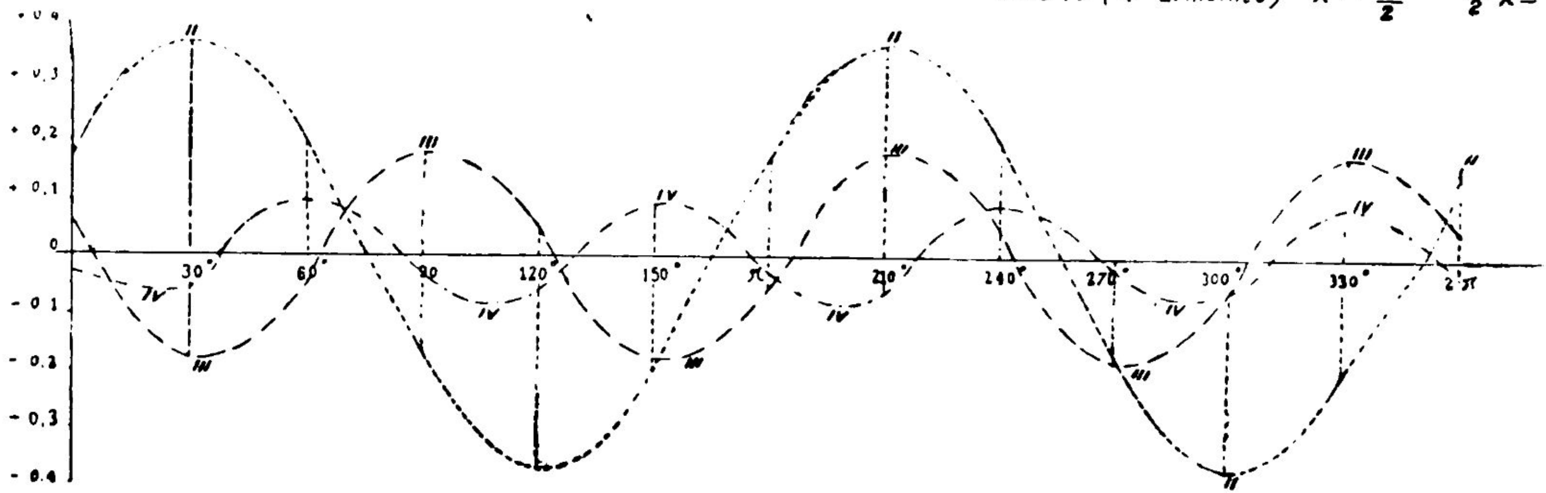
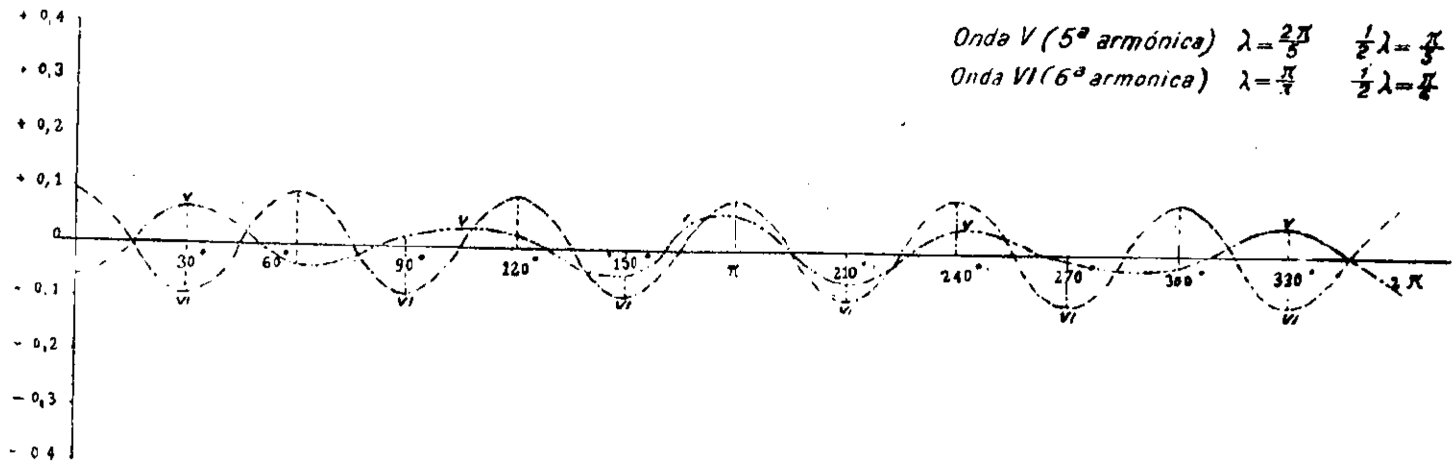


DIAGRAMA N° 3


Onda V (5ª armónica) $\lambda = \frac{2\pi}{5}$ $\frac{1}{2}\lambda = \frac{\pi}{5}$
Onda VI (6ª armonica) $\lambda = \frac{\pi}{3}$ $\frac{1}{2}\lambda = \frac{\pi}{6}$
+ 0,4
+ 0,3
+ 0,2
+ 0,1
0
- 0,1
- 0,2
- 0,3
- 0,4
30°
60°
90°
120°
150°
π
210°
240°
270
300°
330°
2 π
V
VI

APENDICE

AMPLIACIÓN DE LAS EXPLICACIONES RELATIVAS A LAS FÓRMULAS DEL GRUPO (ϵ)

Sean las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y\ dx \ldots \quad (1) \\ p_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \cos kx dx, \ldots \quad (2) \\ q_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \text{ sen } kx\ dx, \ldots \quad (3) \end{aligned}\right\} (\epsilon)$$

La *fórmula (1)* de este grupo *es igual al valor medio de y*, por la muy sencilla razón de que puede ponerse bajo esta forma:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi - o}\int_0^{2\pi} ydx.$$

En consecuencia, se *encuentra a_0 tomando el promedio de las ordenadas, que en la mayoría de los casos resulta = 0.*

La *fórmula* (*2*) de este grupo *es igual a dos veces el valor medio de* ($y \cos k x$), por la muy sencilla razón de que puede ponerse bajo esta forma:

$$p_k = \frac{2}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} y \cos kx \, dx,$$

En consecuencia, *para encontrar* $p_1, p_2, p_3 \ldots p_k$, *se toma un cierto número de valores de y;* se *multiplica cada uno por el coseno del ángulo* x o por el *cos 2x, cos 3x*, etc., del cual *y es la ordenada;* se *halla el promedio de todos esos valores y se multiplica el resultado por 2.*

La *fórmula* (*3*) de este grupo es *igual a dos veces el valor medio de* (y *sen* kx), por la muy sencilla razón de que puede ponerse bajo esta forma:

$$q_k = \frac{2}{2\pi - 0} \int_0^{2\pi} y \operatorname{sen} kx \, dx$$

En consecuencia, *para encontrar* $q_1, q_2, q_3 \ldots q_k$ *se toma un cierto número de valores de y; se multiplica cada uno por el seno del ángulo* x o por el *sen 2x, sen 3x,* etc. del cual *y es la ordenada;* se *halla el promedio de todos esos valores y se multiplica el resultado por 2.*

Todo este trabajo se facilita enormemente por una tabulación adecuada, como puede verse en el siguiente ejemplo.

Ejemplo I.—Aplicación de las fórmulas del grupo (ϵ) *a la curva original de la temperatura de Santiago.*

Estas fórmulas se pueden aplicar muy bien a la curva de la temperatura de Santiago, ya que, tratándose de observaciones realizadas en un período tan largo, 40 años, podemos considerar a la función perfectamente conocida.

Pero a fin de no hacer los cálculos demasiado extensos, representaremos la función solamente por los siguientes términos:

$$y = a_0 + p_1 \cos x + p_2 \cos 2x + q_1 \operatorname{sen} x + + q_2 \operatorname{sen} 2x.$$

Dividiremos el eje de las x en doce partes iguales, elevaremos las ordenadas medias de las temperaturas y tabularemos los valores como sigue:

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)
Meses	N.º de la ordenada	y	x	cos x	sen x	cos 2x	sen 2x
Enero	1	19º,91	0º	1	0	1	0
Febrero	2	18,79	30	0,866	0,500	0,500	0,866
Marzo	3	16,62	60	0,500	0,866	—0,500	0,866
Abril	4	13,19	90	0	1	—1	0
Mayo	5	10,06	120	—0,500	0,866	—0,500	—0,866
Junio	6	7,85	150	—0,866	0,500	0,500	—0,866
Julio	7	7,88	180	—1	0	1	0
Agosto	8	9,00	210	—0,866	—0,500	0,500	0,866
Septiembre	9	11,43	240	—0,500	—0,866	—0,500	0,866
Octubre	10	13,57	270	0	—1	—1	0
Noviembre	11	16,59	300	0,500	—0,866	—0,500	—0,866
Diciembre	12	19,07	330º	0,866	—0,500	0,500	—0,866

Luego

$$a_0 = \text{valor medio de } y = 13^\circ{,}66$$

$$p_1 = 2 \times \text{valor medio de } (y \cos x)$$

Para obtener los valores de y cos x, deben multiplicarse los números correspondientes en las columnas (b) y (d).

Así

$$p_1 = \frac{1}{6} \left([19{,}91 - 7{,}88] + 0{,}866\,[18{,}79 + 19{,}07 - 7{,}85 - 9{,}00] + + 0{,}500\,[16{,}62 + 16{,}59 - 10{,}06 - 11{,}43] \right) = + 6{,}01$$

Del mismo modo

$$p_2 = \frac{1}{6} \times \text{suma de productos de las columnas (b) y (f)}$$

$$p_2 = \frac{1}{6} \left([19{,}91 + 7{,}88 - 13{,}19 - 13{,}57] + 0{,}500\,[18{,}79 + 7{,}85 + 9{,}00 + 19{,}07 - 16{,}62 - 10{,}06 - 11{,}43 - 16{,}59] \right) = +0{,}17$$

$$q_1 = \frac{1}{6} \times \text{suma de productos de las columnas (b) y (e)}$$

$$q_1 = \frac{1}{6} \left([13{,}19 \quad 13{,}57] + 0{,}866\,[16{,}62 + 10{,}06 - 11{,}43 - 16{,}59] + 0{,}500\,[18{,}79 + 7{,}85 - 9{,}00 - 19{,}07] \right) = - 0{,}37$$

$$q_2 = \frac{1}{6} \times \text{suma de productos de las columnas (b) y (g)}$$

$$q_2 = \frac{1}{6} \left(0{,}866\,[18{,}79 + 16{,}62 + 9{,}00 + 11{,}43 - 10{,}06 - 7{,}85 - 16{,}59 - 19{,}07] \right) = + 0{,}33$$

Por lo tanto,

$$y = 13^{\circ}{,}66 + 6{,}01 \cos x + 0{,}17 \cos 2x - 0{,}37 \operatorname{sen} x + 0{,}33 \operatorname{sen} 2x$$

Demostración de las fórmulas (2) y (3) del grupo (ϵ)

Sea la serie

$$y = f(x) = a_0 + p_1 \cos x + p_2 \cos 2x + \ldots\ldots + p_n \cos nx + \ldots\ldots$$
$$+ q_1 \operatorname{sen} x + q_2 \operatorname{sen} 2x + \ldots\ldots + q_n \operatorname{sen} nx + \ldots\ldots$$

Si multiplicamos ambos miembros por *cos kx dx* e integramos entre los límites o y 2π, tenemos:

$$\int_0^{2\pi} y \cos kx\, dx = a_0 \int_0^{2\pi} \cos kx\, dx + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_k \int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx +$$
$$+ p_n \int_0^{2\pi} \cos nx \cos kx\, dx + \ldots\ldots + q_n \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx \cos kx\, dx +$$

Por consiguiente:

$$\int_0^{2\pi} y\cos kx dx = \frac{a_0}{k}\Big[\operatorname{sen} kx\Big]_0^{2\pi} + \dots\dots\dots + \frac{p_k}{2}\Big[x + \frac{\operatorname{sen}2kx}{2k}\Big]_0^{2\pi} + \dots$$

$$\left.\begin{aligned} &+\frac{pn}{2}\Big[\frac{\operatorname{sen}(n-k)x}{n-k} + \frac{\operatorname{sen}(n+k)x}{n+k}\Big]_0^{2\pi} + \dots\dots\dots\dots \\ &-\frac{q_n}{2}\Big[\frac{\cos(n-k)x}{n-k} + \frac{\cos(n+k)x}{n+k}\Big]_0^{2\pi} - \dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

puesto que la diferenciación de

$$y = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2kx}{4k}$$

nos da:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{4} + \frac{8k^2 \cos 2kx}{16k^2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos 2kx}{2} = \frac{1}{2}(1+\cos 2kx)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(2\cos^2\frac{2kx}{2}\right) = \cos^2 kx$$

luego,

$$p_k \int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \frac{p_k}{2}\left[x + \frac{\operatorname{sen} kx}{\frac{2}{2k}}\right]_0^{2\pi}$$

Las restantes integrales se calcularán de igual manera y se obtendrán, sin dificultad alguna, todos los términos del 2.° miembro de la serie (2)

Ahora bien, es fácil ver que todos los términos del 2.° miembro de esta serie desaparecen, a excepción del término cuyo coeficiente es p_k y que viene a ser $= \pi\, p_k$.

Entonces, tenemos:

$$\pi\, p_k = \int_0^{2\pi} y \cos kx\, dx$$

de donde

$$p_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y \cos kx\, dx \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

Del mismo modo, si multiplicamos en la serie primitiva ambos miembros por *sen kx dx* é integramos entre los límites o y 2 π, tenemos:

$$\int_0^{2\pi} y\, \mathrm{sen}kxdx = a_0\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}kxdx + \ldots + p_n \int_0^{2\pi} \cos nx\, \mathrm{sen}kxdx + \ldots$$

$$+ q_k \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}^2kxdx + \ldots + q_n \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\, nx\, \mathrm{sen}kxdx + \ldots$$

Por consiguiente

$$\int_0^{2\pi} y\mathrm{sen}kxdx = -\frac{a_0}{k}\Big[\cos kx\Big]_0^{2\pi} - \ldots + \frac{q_k}{2}\left[x - \frac{\mathrm{sen}2kx}{2k}\right]_0^{2\pi} + \ldots$$

$$-\frac{p_n}{2}\left[\frac{\cos (k-n)x}{k-n} + \frac{\cos (k+n)x}{k+n}\right]_0^{2\pi} - \ldots\ldots$$

$$+\frac{q_n}{2}\left[\frac{\mathrm{sen}\,(n-k)x}{n-k} - \frac{\mathrm{sen}\,(n+k)\,x}{n+k}\right]_0^{2\pi} + \ldots$$

Ahora bien, es fácil ver que todos los términos del 2.° miembro de esta serie desaparecen, a excepción del término cuyo coeficiente es q_k y que viene a ser $= \pi q_k$

Entonces tenemos:

$$\pi\, q_k = \int_0^{2\pi} y\, \mathrm{sen}kxdx$$

de donde

$$q_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y\, \mathrm{sen}kxdx \qquad \text{(Q. E. D).}$$

Demostración de todas las fórmulas del grupo (η).

Dijimos, al hablar de la determinación de las constantes cuando la función es desconocida, que se dividirá el intervalo, desde $x=o$ hasta $x=2\pi$, en n intervalos iguales y se medirán las primeras n ordenadas.

Pues bien, éstas quedarán representadas, en el cuadro que viene a continuación, de esta manera:

	0°	30°	60°	90°	....	....	....	330°
x	0 x_0 (r=o)	$\frac{2\pi}{n}$ x_1 (r=1)	$\frac{4\pi}{n}$ x_2 (r=2)	$\frac{6\pi}{n}$ x_3 (r=3)	....	$r\frac{2\pi}{n}$ x_r	....	$(n-1)\frac{2\pi}{n}$ x_{n-1} (r=11)
y	y_0	y_1	y_2	y_3	......	y_r	....	y_{n-1}

Siendo 2π radiantes $= 360°$; $n = 12$ términos y r toma sucesivamente los valores 0, 1, 2, ... n—1.

Ahora bien, supongamos que deseemos determinar las constantes en la ecuación:

$$y = a_0 + p_1 \cos x + \ldots\ldots\ldots + p_k \cos kx + \ldots$$
$$+ q_1 \operatorname{sen} x + \ldots\ldots\ldots + q_k \operatorname{sen} kx + \ldots$$

en que el número de términos es n, de modo que la correspondiente curva pasará por los n puntos dados en la tabla. Substiyendo las n series de valores de x e y en esta ecuación, obtendremos n ecuaciones lineales de los términos en p y q de la forma·

$$y_0 = a_0 + p_1 \cos x_0 + \ldots\ldots\ldots + p_k \cos kx_0 + \ldots$$
$$+ q_1 \operatorname{sen} x_0 + \ldots\ldots\ldots + q_k \operatorname{sen} kx_0 + \ldots$$

$$y_1 = a_0 + p_1 \cos x_1 + \ldots\ldots\ldots + p_k \cos kx_1 + \ldots$$
$$+ q_1 \operatorname{sen} x_1 + \ldots\ldots\ldots + q_k \operatorname{sen} kx_1 + \ldots$$

$$
\begin{array}{l}
y_2 = a_0 + p_1 \cos x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + p_k \cos kx_2 + \ldots \\
\qquad + q_1 \operatorname{sen} x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + q_k \operatorname{sen} kx_2 + \ldots \\
\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
y_{n-1} = a_0 + p_1 \cos x_{n-1} + \ldots\ldots\ldots + p_k \cos k\, x_{n-1} + \ldots\ldots \\
\qquad + q_1 \operatorname{sen} x_{n-1} + \ldots\ldots\ldots + q_k \operatorname{sen} kx_{n-1} + \ldots\ldots \\
\hline
\Sigma\, y_r = na_0 + \ldots + p_k\, \Sigma \cos kx_r + \ldots\ldots + q_k\, \Sigma \operatorname{sen} kx_r + \ldots
\end{array}
$$

Resolveremos entonces estas *n* ecuaciones para determinar los valores de los coeficientes *p* y *q*.

Ahora bien, la suma de los términos $\cos kx_r$ puede expresarse por la siguiente relación:

$$\cos \alpha + \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots + \cos (\alpha + [n-1]\, \beta) = \Sigma \cos (\alpha + r\beta).$$

Y aplicándole a esta última relación el conocido teorema de Trigonometría, que nos da *la suma de los senos o cosenos de una serie de ángulos que están en progresión aritmética*. (Consúltese la obra "*Tratado Elemental de Goniometría*" por *J. de Mendizabal Tamborel*. Ingeniero Geógrafo mexicano, págs. 441 y 442). (1), se tendrá:

$$\Sigma \cos (\alpha + r\,\beta) = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{n\beta}{2} \cos \left(\alpha + \dfrac{n-1}{2}\, \beta \right)}{\operatorname{sen} \dfrac{\beta}{2}}.$$

De igual manera, y por el mismo teorema, tendremos:

$$\Sigma \operatorname{sen} (\alpha + r\beta) = \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \operatorname{sen} (\alpha + 2\beta) + \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \operatorname{sen} (\alpha + [n-1]\, \beta) = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{n\beta}{2} \operatorname{sen} \left(\alpha + \dfrac{n-1}{2}\, \beta \right)}{\operatorname{sen} \dfrac{\beta}{2}}$$

(1) La demostración de este teorema es la que sigue:
Por medio de las conocidas relaciones trigonométricas

$$2 \cos u \operatorname{sen} v = \operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)$$

$$2 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \cos(u-v) - \cos(u+v)$$

podemos escribir estas otras expresiones:

1.° cosenos

$$2 \cos \alpha \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$2 \cos(\alpha+\beta) \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{3\beta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$2 \cos(\alpha+2\beta) \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{5\beta}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{3\beta}{2}\right)$$

. . . .

$$2 \cos(\alpha+[n-1]\beta) \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\beta\right) - \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{2n-3}{2}\beta\right)$$

Sumando ordenadamente estas igualdades, y observando que todos los términos del segundo miembro se destruyen, exceptuando *el segundo y el penúltimo*, resulta:

$$2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} \; \Sigma \cos(\alpha + r\beta) = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\beta\right) - \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$\text{—————————} = 2\cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right) \operatorname{sen} \frac{n}{2}\beta.$$

De donde:

$$\Sigma \cos(\alpha + r\beta) = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\beta}{2} \cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)}{\operatorname{sen} \frac{\beta}{2}}$$

(Q. E. D.)

y si hacemos $\alpha = o$ y $\beta = l \dfrac{2\pi}{n}$, las relaciones anteriores toman esta forma:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \cos r\, l \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\operatorname{sen} l\pi}{\operatorname{sen} \dfrac{l\pi}{n}} \cos \dfrac{l\,(n-1)\,\pi}{n} = 0, \\ \text{puesto que } \operatorname{sen} l\pi = 0. \\ \Sigma \operatorname{sen} r\, l \dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{\operatorname{sen} l\pi}{\operatorname{sen} \dfrac{l\pi}{n}} \operatorname{sen} \dfrac{l\,(n-1)\,\pi}{n} = 0. \end{array}\right\} (\lambda)$$

puesto que sen $l\pi = 0$.

2.° senos

$$2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)$$

$$2 \operatorname{sen} (\alpha+\beta) \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{3\beta}{2}\right)$$

$$2 \operatorname{sen} (\alpha+2\beta) \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{3\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{5\beta}{2}\right)$$

. . . .

$$2 \operatorname{sen} (\alpha + [n-1]\, \beta) \operatorname{sen} \frac{\beta}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{2n-3}{2}\beta\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2n-1}{2}\beta\right)$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y observando que todos los términos del segundo miembro se destruyen, exceptuando *el primero* y *el último*, resulta:

Ahora bien, cuando l = 0, la 1.ª de estas fórmulas se convierte en esta otra:

$$\Sigma \cos rl \frac{2\pi}{n} = \Sigma \cos o = n,$$

por que *cos o = 1* y como son *n* veces *1*, por estar la base dividida en *n* partes iguales, forzosamente $\Sigma \cos o = n$,

y cuando l = n

$$\Sigma \cos r\, l \frac{2\pi}{n} = \Sigma \cos 2\, r\pi = n.$$

y desde que, según se puede ver en el cuadro,

$$x_r = r\frac{2\pi}{n},$$

podemos finalmente establecer que:

$\Sigma \cos lx_r = 0$, salvo cuando l = *o* ó *l* = *n*, en que es = *n*

y $\Sigma \operatorname{sen} l\, x_r = 0$, para todos los valores de *l*

$$2 \operatorname{sen} \frac{\beta}{2}\, \Sigma \operatorname{sen}(\alpha + r\beta) = \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{2\,n-1}{2}\beta\right)$$

$$= 2 \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right) \operatorname{sen} \frac{n\beta}{2}$$

De donde:

$$\Sigma \operatorname{sen}(\alpha + r\beta) = \frac{\operatorname{sen} \frac{n\beta}{2} \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)}{\operatorname{sen} \frac{\beta}{2}} \qquad \text{(Q. E. D).}$$

En consecuencia, para determinar a a_0 simplemente sumamos las n ecuaciones, y obtenemos:

$$\Sigma y_r = n a_0 + \ldots\ldots + p_k \Sigma \cos k x_r + \ldots\ldots + q_k \Sigma \operatorname{sen} kx_r + \ldots$$

y por último,

$$\Sigma y_r = n a_0,$$

puesto que todos los otros términos desaparecen, a excepción del primero.

De donde

$$a_0 = \frac{1}{n} \Sigma y_r \ldots\ldots\ldots \quad \text{(Q. E. D.)}$$

Determinación de p_k

Para determinar p_k multiplicaremos cada una de las n ecuaciones por el coeficiente de p_k en esa ecuación, esto es, por *cos* kx_r, y sumaremos las n ecuaciones resultantes.

Así, obtendremos:

$$\begin{aligned}
y \cos kx_0 = a_0 \cos kx_0 &+ p_1 \cos x_0 \cos kx_0 + \ldots\ldots + p_k \cos^2 kx_0 + \\
&+ q_1 \operatorname{sen} x_0 \cos kx_0 + \ldots\ldots + q_k \operatorname{sen} kx_0 \cos kx_0 + \\
y_1 \cos kx_1 = a_0 \cos kx_1 &+ p_1 \cos x_1 \cos kx_1 + \ldots\ldots + p_k \cos^2 kx_1 + \\
&+ q_1 \operatorname{sen} x_1 \cos kx_1 + \ldots\ldots + q_k \operatorname{sen} kx_1 \cos kx_1 + \\
&\vdots \\
y_{n-1} \cos kx_{n-1} = a_0 \cos kx_{n-1} &+ p_1 \cos x_{n-1} \cos kx_{n-1} + \ldots + p_k \cos^2 kx_{n-1} + \\
&+ q_1 \operatorname{sen} x_{n-1} \cos kx_{n-1} + \ldots\ldots + q_k \operatorname{sen} kx_{n-1} \cos kx_{n-1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma y_r \cos kx_r = a_0 \Sigma \cos kx_r &+ \ldots\ldots\ldots + p_k \Sigma \cos^2 kx_r + \ldots\ldots \\
&+ p_p \Sigma \cos px_r \cos kx_r \ldots + q_p \Sigma \operatorname{sen} p x_r \cos kx_r + \ldots
\end{aligned}$$

Ahora

$$\Sigma \cos kx_r = 0$$

$$\Sigma \cos px_r \cos kx_r{}^* = \frac{1}{2}\, \Sigma \cos (p+k)\, x_r + \frac{1}{2}\, \Sigma \cos (p-k)\, x_r = 0;$$

$$\Sigma \operatorname{sen} p\, x_r \cos kx_r{}^* = \frac{1}{2}\, \Sigma \operatorname{sen} (p+k)\, x_r + \frac{1}{2}\, \Sigma \operatorname{sen} (p-k)\, x_r = 0;$$

$$\Sigma \cos^2 kx_r{}^* = \Sigma \frac{1}{2} (1+\cos 2\, kx_r) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\, \Sigma \cos 2kx_r = \frac{n}{2}, \text{ si } k \neq \frac{n}{2}$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n, \text{ si } k = \frac{n}{2}$$

Por consiguiente,

$$\Sigma\, y_r \cos kx_r = \frac{n}{2}\, p_k, \text{ salvo cuando } k = \frac{n}{2}, \text{ en que}$$

$\Sigma\, y_r \cos kx_r = np_k$.

De donde

$$p_k = \frac{2}{n}\, \Sigma\, y_r \cos kx_r. \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

---

* Se usan los siguientes relaciones trigonométricas:

$2 \cos u \cos v = \cos (u+v) + \cos (u-v)$

$2 \operatorname{sen} u \cos v = \operatorname{sen} (u+v) + \operatorname{sen} (u-v)$

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = 1+\cos a$$

Determinación de q_k

Para determinar q_k multiplicaremos cada una de las *n* ecuaciones por el coeficiente de q_k en esa ecuación, esto es, por $sen\ kx_r$, y sumaremos las *n* ecuaciones resultantes.

Así, obtendremos:

$$y\,\text{sen}\,kx_0 = a_0\,\text{sen}\,kx_0 + p_1\cos x_0\,\text{sen}\,kx_0 + \ldots\ldots + p_k\cos kx_0\,\text{sen}\,kx_0 + $$
$$+ q_1\,\text{sen}\,x_0\,\text{sen}\,kx_0 + \ldots\ldots + q_k\,\text{sen}^2 kx_0 + \ldots\ldots$$

$$y_1\,\text{sen}\,kx_1 = a_0\,\text{sen}\,kx_1 + p_1\cos x_1\,\text{sen}\,kx_1 + \ldots\ldots + p_k\cos kx_1\,\text{sen}\,kx_1 +$$
$$+ q_1\,\text{sen}\,x_1\,\text{sen}\,kx_1 + \ldots\ldots + q_k\,\text{sen}^2 kx_1 + \ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$y_{n-1}\,\text{sen}\,kx_{n-1} = a_0\,\text{sen}\,kx_{n-1} + p_1\cos x_{n-1}\,\text{sen}\,kx_{n-1} + \ldots + p_k\cos kx_{n-1}\,\text{sen}\,kx_{n-1} +$$
$$+ q_1\,\text{sen}\,x_{n-1}\,\text{sen}\,kx_{n-1} + \ldots + q_k\,\text{sen}^2 kx_{n-1} +$$

$$\Sigma\, y_r\,\text{sen}\,kx_r = a_0\,\Sigma\,\text{sen}\,kx_r + \ldots\ldots + p_p\,\Sigma\cos px_r\,\text{sen}\,kx_r + \ldots$$
$$+ q_k\,\Sigma\,\text{sen}^2 kx_r + \ldots + q_p\,\Sigma\,\text{sen}\,px_r\,\text{sen}\,kx_r + \ldots$$

Ahora

$$\Sigma\,\text{sen}\,kx_r = 0$$

$$\Sigma\cos px_r\,\text{sen}\,kx_r\ {}^* = \frac{1}{2}\Sigma\,\text{sen}\,(k+p)\,x_r + \frac{1}{2}\Sigma\,\text{sen}\,(k-p)\,x_r = 0$$

$$\Sigma\,\text{sen}\,px_r\,\text{sen}\,kx_r\ {}^* = \frac{1}{2}\cos\,(p-k)\,x_r - \frac{1}{2}\Sigma\cos\,(p+k)\,x_r = 0$$

$$\Sigma\,\text{sen}^2 kx_r\ {}^* = \Sigma\frac{1}{2}(1-\cos 2kx_r) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\Sigma\cos 2kx_r = \frac{n}{2},\ \text{si}\ k \neq \frac{n}{2}$$

$$= \frac{n}{2} - \frac{n}{2} = 0,\ \text{si}\ k = \frac{n}{2}$$

---

* Se usan las siguientes relaciones trigonométricas:

$2\,\text{sen}\,u\cos v = \text{sen}\,(u+v) + \text{sen}\,(u-v)$

$2\,\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v = \cos\,(u-v) - \cos\,(u+v).$

$$2\,\text{sen}^2\frac{a}{2} = 1 - \cos a$$

Por consiguiente,

$$\Sigma\, y_r \operatorname{sen} kx_r = \frac{n}{2}\, q_k$$

De donde

$$q_k = \frac{2}{n} \Sigma\, y_r \operatorname{sen} kx_r \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

DETERMINACIÓN DEL PERÍODO DE LAS ONDAS ARMÓNICAS

Sea una onda cualquiera representada por la ecuación

$$y = q_k \operatorname{sen} kx$$

Ahora bien, sabemos que el período de una onda es la distancia entre dos puntos de intersección de ésta con el eje de las x y marchando en la misma dirección. Por consiguiente, en ambos casos, la ordenada se anula y también la función. Pero ésta se convierte en 0 cuando

$$\begin{aligned} kx &= 0 \\ kx &= \pi \\ kx &= 2\pi \\ kx &= 3\pi \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Consideremos

$$kx = 2\pi$$

de donde

$$x = \frac{2\pi}{k}$$

Así, pues, el período, o longitud de onda, de la curva

$$y = q_k \operatorname{sen} kx$$

$$\text{es } \frac{2\pi}{k}$$

Entonces, si designamos a este período, o longitud de onda, por

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

tenemos

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

y la ecuación de la curva puede ser escrita en esta forma

$$y = q_k \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\lambda},$$

donde q_k es la amplitud y λ el período o longitud de onda.

De todo lo anteriormente expuesto, deducimos la regla siguiente:

"*Para obtener el período de una función senoidal dividiremos 360° por el coeficiente de x ó t* (*o cualquier letra que se adopte para la base* o "*variable independiente*"), o más brevemente.

$$\text{Período en grado} = \frac{360^\circ}{\text{coeficiente de x ó t}}$$

Puesto que 2π radiantes = 360°, en donde hayamos puesto 360° deberíamos poner 2π, si quisiéramos que el ángulo estuviera expresado en radiantes, o sea, que el período en radiantes o en segundos (de tiempo) fuese

$$= \frac{2\pi}{\text{coeficiente de x ó t}}$$

De modo que si tenemos una curva representada por la ecuación

$$y = 4 \text{ sen } 6x$$

sería el

$$\textit{Período} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ ó } 60^\circ$$

y la

$$\textit{Amplitud} = 4.$$

Punto donde la onda $y = c_k$ sen $(kx+A_k)$ corta al eje de las x.

Cuando la onda $y = c_k$ sen $(kx+A_k)$ corta al eje de las x, la ordenada y la función se anulan.

Por tanto

$$kx + A_k = o$$

de donde

$$x = -\frac{A_k}{k}$$

Así, pues, aplicada esta sencilla fórmula a las fases de las seis armónicas en que ha sido descompuesta *la curva de la temperatura de Santiago*, obtenemos los siguientes valores, que concuerdan muy bien con los deducidos de los gráficos:

1.ª armónica.......... $x = -\frac{-86°23'}{1} = +\ 86°23'$

2.ª armónica.......... $x = -\frac{27°15'}{2} = -\ 13°37'$

3.ª armónica.......... $x = -\frac{-15°31'}{3} = +\ 5°\ 10'$

4.ª armónica.......... $x = -\frac{20°33'}{4} = -\ 5°\ 8'$

5.ª armónica.......... $x = -\frac{-80°32'}{5} = +\ 16°6'$

6.ª armónica.......... $x = -\frac{-90°}{6} = +\ 15°$