Pequeño estudio sobre un caso especial de pieza cargada de punta excéntricamente

POR

ALFREDO MONTERO GUILLOU

En algunos sistemas de viaductos o puentes metálicos o de concreto armado, se presenta a menudo el caso de que el tablero que soporta la vía descanse, ya sea sobre el terreno o sobre un arco, por el intermedio de pilas sencillas formadas por un solo plano perpendicular al eje del puente, y a las cuales algunos autores españoles denominan *palizadas*.

Cuando el tablero es algo largo, resulta que la dilatación por el calor es también considerable; ahora bien, como el tablero va sujeto invariablemente en uno de sus puntos, en la clave del arco, cuando se trata de un viaducto de esta clase, o en uno de los estribos en caso contrario, resulta que la dilatación en los puntos alejados de la ligazón del tablero, obliga a las palizadas o pilas a tomar una flecha igual a dicha dilatación, por cuanto el pie de ella está fijo a la fundación, mientras que su capitel va fijo al tablero realizándose un empotramiento casi perfecto, excepción hecha en algunos viaductos noruegos, en que estas palizadas van articuladas en su base y capitel.

Resulta entonces que las cargas verticales ya no obrarán según el eje de la palizada, sino con una excentricidad igual a la dilatación del tablero, originándose así una solicitación peligrosa para la pieza, y si ésta ha sido calculada únicamente como pieza cargada de punta, podría fallar.

La solicitación sería entonces la indicada en la fig. 1.

Se puede deducir a priori que esta solicitación es más desfavorable mientras menor sea la altura de la pieza, por cuanto entonces la flecha toma más importancia, y en la práctica esto sucede por lo general, donde precisamente la dilatación es máxima, porque el terreno por lo común va subiendo hacia los extremos.

Al producirse la dilatación, la palizada se flexiona, pero no sin oponer una cierta resistencia debida a su rigidez, la que se traduce en una reacción horizontal, y entonces reemplazando la ligazón por su reacción, tenemos que considerar la palizada como una pieza empotrada y fija en un extremo, y libre y guiada con una flecha constante en el otro, y sometida a 2 fuerzas: una vertical P y otra horizontal Q.

En estas condiciones, llamando h la altura de la pieza y a la flecha máxima,

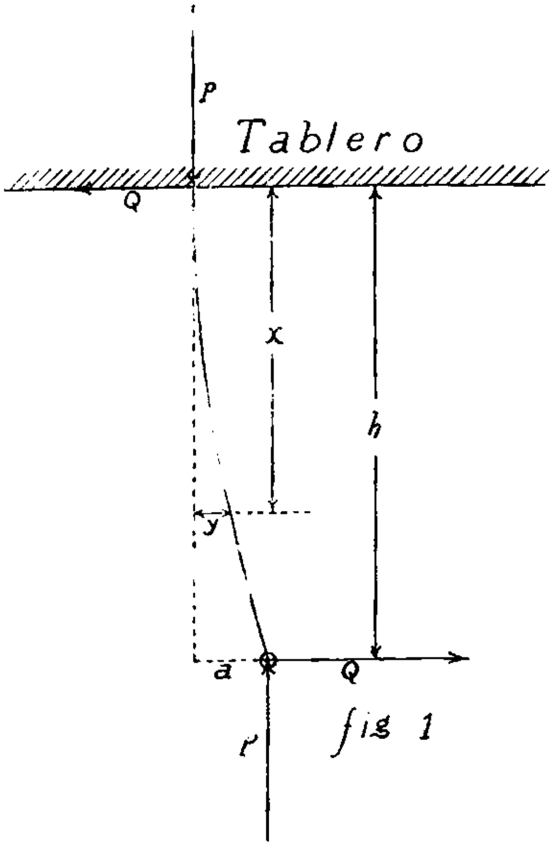

fig 1

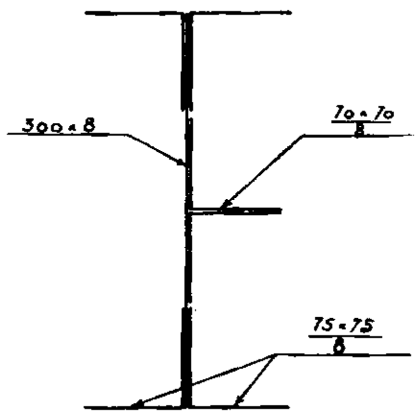

fig. 2

x la distancia de un punto cualquiera del eje de la pieza al capitel, e y la distancia a la vertical que pasa por el capitel, la ecuación de la elástica del eje es:

$$1)\qquad y = \frac{Q}{P}\left[-x + \frac{1}{\sqrt{\frac{P}{EI}}} \; \frac{\operatorname{sen} h\sqrt{\frac{P}{EI}} - \operatorname{sen}\,(h-x)\sqrt{\frac{P}{EI}}}{\cos h\sqrt{\frac{P}{EI}}} \right]$$

siendo I el momento de inercia de la sección según un eje perpendicular a la dirección de la flecha.

Para la flecha máxima se tiene:

$$y = a \qquad x = h \qquad \text{y poniendo } EI = \xi$$

queda:

$$a = \frac{Q}{P}\left[\frac{tg\, h\sqrt{\frac{P}{\xi}}}{\sqrt{\frac{P}{\xi}}} - h\right] \tag{2}$$

Como a no depende en nada de la solicitación de la pieza, sino solamente de la longitud del tablero, y siendo además para este estudio una cantidad fija, es evidente que para que se verifique la igualdad (2) es necesario que Q tenga un valor tal que satisfaga dicha ec.; en consecuencia

$$Q = \frac{Pa}{\frac{tg\, h\sqrt{\frac{P}{\xi}}}{\sqrt{\frac{P}{\xi}}} - h} = \frac{Pa\sqrt{\frac{P}{\xi}}}{tg\, h\sqrt{\frac{P}{\xi}} - h\sqrt{\frac{P}{\xi}}}$$

haciendo $h\sqrt{\frac{P}{\xi}} = \alpha$ queda:

$$Q = \frac{Pa}{h} \cdot \frac{\alpha}{tg\, \alpha - \alpha} \tag{3}$$

Se vé entonces que Q no depende sólo de la rigidez de la pieza, sino también de las cargas verticales.

El momento debido a P y Q en una sección cualquiera, vale:

$$M_x = P(a-y) + Q(h-x)$$

Introduciendo el valor de y obtenido en 1), se tiene:

$$M_x = Pa + Qh - Q\left[-x + \frac{1}{\sqrt{\frac{P}{\xi}}} \cdot \frac{\operatorname{sen} h\sqrt{\frac{P}{\xi}} - \operatorname{sen}(h-x)\sqrt{\frac{P}{\xi}}}{\cos h\sqrt{\frac{P}{\xi}}}\right] - Q.\, x$$

$$Mx = \left(Pa + Qh - \frac{Q}{\sqrt{\frac{P}{\xi}}} \operatorname{tg} h \sqrt{\frac{P}{\xi}} \right) + \left(\frac{Q}{\sqrt{\frac{P}{\xi}}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(h-x)\sqrt{\frac{P}{\xi}}}{\cos h \sqrt{\frac{P}{\xi}}} \right)$$

De la ec. 2) se deduce que el primer paréntesis vale cero; en efecto, se obtiene:

$$Pa = \frac{Q}{\sqrt{\frac{P}{\xi}}} \cdot \operatorname{tg} h \sqrt{\frac{P}{\xi}} - Qh$$

Entónces queda:

4) $$M_x = \frac{Q}{\sqrt{\frac{P}{\xi}}} \cdot \frac{\operatorname{sen}(h-x)\sqrt{\frac{P}{\xi}}}{\cos h \sqrt{\frac{P}{\xi}}}$$

que es máximo para x=o, e. d., en la sección de empotramiento, y cuyo valor es:

$$M \max. = \frac{Q}{\sqrt{\frac{P}{\xi}}} \operatorname{tg} h \sqrt{\frac{P}{\xi}}$$

o bien:

$$M' \max. = Qh \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$$

Introduciendo el valor de Q obtenido en 3), queda:

$$M \max. = Pa \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha}$$

5) $$M \max. = Pa \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}$$

Esta es la expresión exacta del momento en la sección de empotramiento, pero como el factor $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \alpha}$ es demoroso de formar, trataremos de transformarla en otra más sencilla, aunque sólo aproximada.

Desarrollando la tg en serie, se tiene:

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{2\,\alpha^5}{3\times 5} + \frac{17\,\alpha^7}{3^2\times 5\times 7} + \cdots\cdots$$

serie que es convergente para

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Ahora, según la fórmula de Euler, se debe tener en los casos de la práctica para este estado de solicitación, y tomando sólo como una seguridad la doble articulación, que:

$$P \leq \frac{\pi^2\,\xi}{n\ h^2}$$

siendo n el grado de seguridad, que generalmente se toma entre 4 y 5. Se obtiene:

$$h\sqrt{\frac{P}{\xi}} = \alpha < \frac{\pi}{2}$$

y como también $\alpha > o$, luego la condición de convergencia existe, y entonces po demos considerar solo los primeros términos de serie.

La expresión del momento será:

$$\text{Mmax.} = \text{Pa.}\ \frac{\alpha + \dfrac{\alpha^3}{3} + \dfrac{2\,\alpha^5}{3\times 5} + \dfrac{17\,\alpha^7}{3^2\times 5\times 7} + \cdots\cdots}{-\alpha + \alpha \quad + \dfrac{\alpha^3}{3} + \dfrac{2\,\alpha^5}{3\times 5} + \dfrac{17\,\alpha^7}{3^2\times 5\times 7} + \cdots\cdots}$$

$$= \text{Pa}\,\frac{3}{\alpha^2}\left(\frac{1 + \dfrac{1}{3}\alpha^2 + \dfrac{2}{3\times 5}\alpha^4 + \dfrac{17}{3^2\times 5\times 7}\alpha^6 + \cdots\cdots}{1 + \dfrac{2}{5}\alpha^2 + \dfrac{17}{3\times 5\times 7}\alpha^4 + \dfrac{62}{3\times 5\times 7\times 9}\alpha^6 + \cdots\cdots}\right)$$

o bien:

$$\text{Mmax.} = \frac{3\ \text{Pa}}{\alpha^2}\left(\frac{1 + \dfrac{5}{15}\alpha^2 + \dfrac{14}{3\times 5\times 7}\alpha^4 + \dfrac{51}{3\times 5\times 7\times 9}\alpha^6 + \cdots\cdots}{1 + \dfrac{6}{15}\alpha^2 + \dfrac{17}{3\times 5\times 7}\alpha^4 + \dfrac{62}{3\times 5\times 7\times 9}\alpha^6 + \cdots\cdots}\right)$$

Examinando los coefs., se vé que cualquiera que sea el valor de α, el paréntesis es menor que 1; ahora, en nuestro caso, α varía entre o y $\pi\sqrt{\frac{1}{5}}$; por esto, y por la convergencia de la serie, su valor es muy cercano a 1. Para $\alpha = o$, su valor es 1, para $\alpha = 1$ vale 0,933; para $\alpha = 2$, vale 0,843. Entonces, cometiendo un pequeño error que ayuda a la seguridad, tomaremos la unidad, y nos queda:

$$Mmax. = \frac{3\,P_a}{\alpha^2} = \frac{3\,P\,a}{h^2\,\frac{P}{\xi}}$$

$$6)\quad Mmax. = \frac{3\,a\,E\,I}{h^2}$$

El momento es, pues, independiente de P.

Supongamos ahora una fuerza horizontal única F que actúa en el extremo libre de una pieza empotrada en el otro extremo; la expresión de la flecha es:

$$f = \frac{Ph^3}{3\,E\,I}$$

$$\therefore\ 7)\quad F = \frac{3\,f\,E\,I}{h^2}$$

expresión idéntica a 6). De aquí se deduce generalizando, que:

«Siempre que sea aplicable la fórmula de Euler, el momento producido en la sección de empotramiento de una pieza en las condiciones anteriores de solicitación, es constante e independiente de la intensidad de las cargas verticales, y es equivalente al que produce una fuerza horizontal única que origine una flecha igual a la considerada, no existiendo cargas verticales, y cuya expresión es la ec. 8)».

Supongamos ahora que no sea aplicable la fórmula de Euler, sino la de Tetmayer, o sea, que $\frac{h}{r} < 105$ para el acero o $\frac{h}{r} < 112$ para el fierro.

Se tiene que:

$$\alpha = h\sqrt{\frac{p}{EI}} = h\sqrt{\frac{P}{E\omega r^2}} = \frac{h}{r}\sqrt{\frac{p_s}{E}}$$

siendo r el radio de giración de la sección y p_s la fatiga de seguridad de la fórmula de Tetmayer, cuya expresión es:

$$p_s = R'\left(1 - 0{,}0043\ \frac{h}{r}\right)\ \text{para el fierro}$$

$$\text{y}\quad p_s = R'\left(1 - 0{,}0037\ \frac{h}{r}\right)\ \text{» » acero}$$

El valor de α es máximo cuando $\frac{h}{r}$ se encuentra en el límite superior de aplicación de estas fórmulas, y suponiendo que las tasas sean las máximas admi sibles, tenemos:

$$\alpha \text{ max.} = 111 \sqrt{\frac{8}{20000}\left(1 - 0{,}0043 \times 111\right)} \text{ para el fierro}$$

$$\alpha \text{ max.} = 1.61$$

$$\text{y} \qquad \alpha \text{ max.} = 104 \sqrt{\frac{10}{22000}\left(1 - 0{,}0037 \times 104\right)}$$

$$\alpha = 1.74 \text{ para el acero}$$

Con $\alpha = 1{,}8$, el paréntesis de la expresión del momento vale al rededor de 0,845. de modo que el error máximo que se podría tener con este procedimiento sería el 15% del momento máximo, y por consiguiente también un error de 15% en las fatigas debidas a este momento.

De modo, pues, que la generalización que hemos hecho anteriormente, puede extenderse sin inconveniente a todos los casos de la práctica.

En cuanto a las fatigas, se tiene:

$$t = \frac{P}{\Omega} \pm \frac{M.v}{I}$$

Introduciendo el valor de M de la ec. 6) resulta:

$$t = \frac{P}{\Omega} \pm \frac{3\,a\,E\,I\,v}{h^2\,I}$$

$$8) \qquad t = \frac{P}{\Omega} \pm \frac{3\,a\,E\,v}{h^2}$$

Se ve que la fatiga debida a la flexión es independiente de P y de I, y varía en razón inversa de h^2, lo que justifica lo que habíamos dicho antes, de que el peligro mayor está en las palizadas más cortas.

La fórmula 8) es homogénea:

$$FL^{-2} = FL^{-2} \pm \frac{L \,.\, FL^{-2} \,.\, L}{L^2}$$

Si la pieza se encuentra además empotrada en su base, entonces el momento máximo se verifica en las 2 secciones de empotramiento y vale

$$M\ max. = \frac{3\,a\,E\,I}{2\,h^2}$$

y entonces

$$t = \frac{P}{\Omega} \pm \frac{3\,a\,E\,v}{2\,h^2}$$

Si no hay empotramiento en ningún extremo, sino doble articulación, entónces

$$M = o \quad y \quad t = \frac{P}{\Omega}$$

En algunos casos la fatiga debida a esta flexión puede tomar gran importancia, y aún sobrepasar en mucho la tasa permitida, como se podrá ver en el siguiente ejemplo:

En un viaducto recientemente proyectado, una de las palizadas extremas, con 8 m. de altura recibía una carga vertical sobre cada montante (arbaletrier) de 51 tons.; la sección de cada montante es la de la fig. 2, sirviendo las cantoneras centrales para el ensamble de las diagonales y montantes de la palizada.

Las características eran:

$$I = 9480\ cm.^4 \quad \Omega = 90{,}5\ cm.^2$$

$$\therefore\ r = 10{,}23\ cm.$$

Entonces $$\frac{h}{r} = \frac{800}{10{,}23} = 78{,}1$$

La fórmula aplicable siendo la de Tetmayer, se tenía con acero dulce:

$$p_s = R'\ (1 - 0{,}00\,37 \times 78{,}1)$$

la tasa admisible R' era de 9,15 Kg/mm.², luego:

$$p_s = 9{,}15\ (1 - 0{,}289) = 6{,}50\ Kg/mm.^2$$

y la fatiga efectiva era de

$$t = \frac{5100}{905} = \underline{\underline{5{,}63}}\ Kg./mm.^2$$

La pieza era pues, perfectamente admisible bajo este solo punto de vista,

Pero dicha palizada estaba sometida a la dilatación de 180 m. de tablero, el cual estaba fijo más o menos en su parte media, de modo que con una variación de temperatura, se tenía:

$$a = 180 \times 0{,}0000\,12 \times 30$$

$$a = 0{,}0648 \text{ m.}$$

Entonces la fatiga debida a la flexión sola, era de:

$$t_1 = \frac{3 \times 6{,}48 \times 2200000 \times 15}{640000}$$

$$t_1 = 1005 \text{ Kg./cm.}^2$$

de modo que en total se tenía:

$$t = 5{,}63 + 10{,}05 = \underline{\underline{15{,}68}} \text{ Kg./mm.}^2$$

Hubo entonces necesidad de formar una sección con v lo menor posible y aumentar Ω, para disminuir también el factor $\frac{P}{\Omega}$ y quedar más o menos en los 9,15 Kg. permitidos.

Queda entonces de manifiesto lo necesario que es verificar las fatigas secundarias que originan por la flexión en piezas solicitadas como la que hemos estudiado, verificación que puede hacerse por medio de la fórmula 8) que hemos determinado, cuidando siempre que la fatiga $\frac{P}{\Omega}$ satisfaga a la condición de pieza cargada de punta, y la fatiga total t no sobrepase la tasa por compresión simple.

Santiago, Julio 1915.