Levantamientos Altimétricos

POR

AUGUSTO KNUDSEN

El método altimétrico de levantamientos, o sea empleando bases verticales, es especialmente adaptable a Chile, en su calidad de pais francamente montañoso, cuyo figurado alterna bajo grandes desniveles las eminencias con las depresiones del suelo, ofreciendo múltiples puntos de mira que erijidos en estaciones, se hacen aptos para dominar áreas considerables de territorio topográfico.

Es precisamente debido a este aspecto accidentado del terreno que el uso de los instrumentos diastimométricos, principalmente del taquímetro, ha tenido tan abundantes éxitos entre los injenieros nacionales, multiplicándoles en cada caso los puntos de observacion favorables que les lleva a los relevos rápidos requeridos para la ubicacion de sus proyectos, con una funcion de tiempo que se hace mui comparable con la que se obtiene en suelos ménos discontínuos.

Pero con todas sus ventajas, las medidas micrométricas tropiezan bien pronto con el límite que la distancia les impone, el cual se restrinje a unos 300 metros en nuestra práctica precisa, de manera que el profesionista que eludiendo las angustias de un levantamiento por cánevas, deseara proceder por radiacion desde un polo, con igual acierto pero mayor amplitud que operando diastimométricamente, tiene un recurso precioso en el metodo altimétrico, el cual le permite tambien controlar, como veremos, la precision de los polígonos taquimétritros con que quiera acompañarse.

El método altimétrico no es nuevo, pues rastros de el se hallan en muchos textos, sobre todo en los especialistas de la marina, aunque no conozco en estos ninguna discusion razonada de sus alcances i límites. Puedo sí dar testimonio que fué aplicado en la injeniería por primera vez en Chile, o mas bien fué descubierto por Don Alejandro Bertrand el año 1880 en condiciones curiosas que hasta participaron de los caracteres de una inspiracion. Hallándose este injeniero en la cima de la torre del faro Serrano, en Iquique, con el objeto de obtener una vista del conjunto de dicha isla, antes de proceder a su levantamiento, se preparaba a descender lamentando la imposibilidad de fijar desde esa única estacion todo el lujo de detalles que el perímetro insular le mostraba, cuando le asaltó la idea de que tomando la altura del punto de observacion sobre el mar como base vertical o cateto comun de una serie de triángulos rectángulos, cuyas hipotenusas fueran las visuales a los distintos puntos del contorno i aun a las múltiples rocas i arrecifes desligados del cuerpo principal, los catetos horizontales quedarian perfectamente determinados en magnitud i posicion con solo observar los ángulos de depresion i de azimut de cada visual que el observador tomara a su discresion, sin maniobra de señales ni traslado de alarifes.

Huelga decir que el éxito completo coronó la teoria i que en una hora se obtuvo un levantamiento hidrográfico mas minucioso que acaso en uno o dos dias trabajados de otra manera.

El que esto escribe adoptó desde entonces el método i ha tenido ocasion de hacerlo extensivo al caso en que el area levantada no es de nivel, de lo cual puede citar como ejemplo típico el levantamiento hipsométrico volante, hecho en 1889 en compañia de Don Cárlos Herrmann, del paso de Uspallata entre Juncal i la cumbre, con curvas cada diez metros levantadas directamente i sin emplear interpolaciones, el cual como operacion topográfica nada dejó que desear, como lo prueba que sobre él se ubicase primero i luego se replantease en el terreno una fantástica cadena de túneles helicoidales.

Al hacer hoi una exposicion del método en los Anales, me mueve sobre todo el deseo de recordarlo a nuestros injenieros que estan en vísperas de considerar graves problemas hidráulicos, como ser la irrigacion jeneral del pais i las obras de puertos, ante los cuales es mui posible que quieran aprovecharse de las ventajas altimétricas en los levantamientos rápidos i detallados que con fines de aforo o de relevo tengan que practicar de los lagos de cordillera o las radas de la costa, requeridos por sus proyectos. Ademas puede extendersele a los reconocimientos cordilleranos de la vias trasandinas.

Comenzaremos por discutir el grado de exactitud en los resultados i los límites dentro de los cuales se encierran sus aplicaciones, pues hai varias causas de error que influyen en las conclusiones de la teoría. De estas las principales son:

1. *La curvatura terrestre.*
2. *La refraccion atmosférica.*
3. *La aproximacion de los ángulos verticales.*
4. *El error de medida de la base comun.*

Calcularemos las fórmulas que avalúan estos errores i enseguida indicaremos la manera como pueden quedar eliminados en la práctica, para evitarse el trabajo de las correcciones directas.

CURVATURA. Las superficies de nivel terrestre no son planas sino aproximadamente esferas concéntricas con el jeoide, de acuerdo con los principios de la gravitacion universal.

La diferencia del nivel entre dos puntos es así la diferencia de radios de las esferas concéntricas que los contienen, de manera que toda distancia *H D*, Fig. 1 calculada con el cateto *A H* i el ángulo *H A D*, diferira practicamente en la cantidad C′ D, de la verdadera distancia interceptada sobre la esfera terrestre.

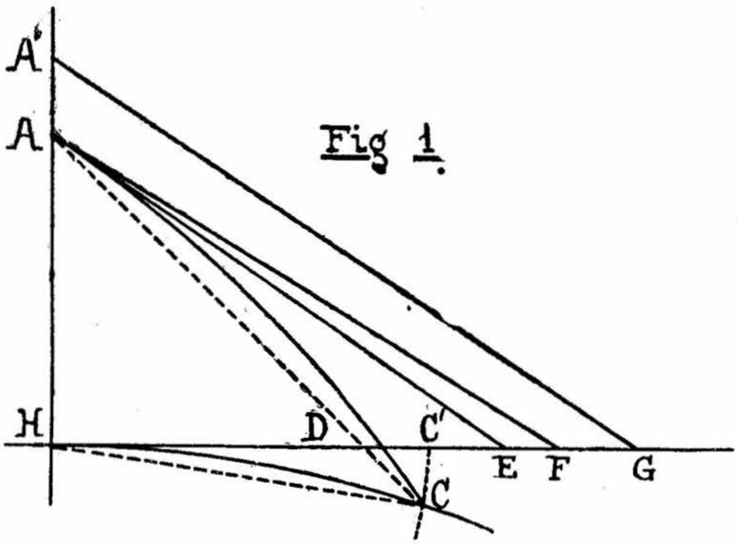

Fig 1.

Este error C′ D, será aditivo o subtractivo del catecto D H, segun que la estacion A esté a un nivel superior o inferior al de C.

Sean C′ D,=c; R=el radio terrestre; A el ángulo observado H A C; O=el ángulo A, centro, C i por último el desnivel A H=b; obtendremos:

$$c = C\,C' \text{ tang } A = C'\,H \text{ tang } \tfrac{1}{2}\,O \text{ tang } A$$

Como $\frac{1}{2}$ O es ángulo mui pequeño i el radio de la esfera que contiene al punto C difiere mui poco de R:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}\,O = \tfrac{1}{2}\,\frac{O}{R} = \frac{C\ H}{2\ R} = \frac{C'\ H}{2\ R}$$

Luego:

$$c = \frac{(C'\ H)^2 \text{ tang } A}{2\ R}$$

Por otra parte:

$$C'\ H = D\ H + C'\ D = b \text{ tang } A + c$$

valor que introducido en la fórmula anterior de c con desprecio de los términos de segundo órden dá:

$$c = \frac{b^2 \operatorname{tang}^3 A}{2R} + \frac{2\, b\, c \operatorname{tang}^2 A}{2R}$$

De donde en definitiva:

$$c = \frac{b^2 \operatorname{tang}^3 A}{2(R - b \operatorname{tang}^2 A)} \quad \cdot \quad (1)$$

Refraccion. La trayectoria de la luz en la atmósfera es una curva variable con el ángulo de altura, como por ejemplo la que une A con C, fig. 1. Con este motivo el punto C no se ve en su verdadera direccion A C sino segun A E, tangente a la curva en el punto de observacion. En consecuencia la medida del ángulo C A H afectará un error E A C tal que la distancia horizontal calculada contendrá otro error E D, en todo caso de signo opuesto al de curvatura.

No entra en nuestro programa discutir la ecuacion precisa de esa trayectoria, máxime cuando está sujeta a cambios accidentales de todo jénero que pueden llegar hasta hacerla convexa hácia la tierra con produccion de los fenómenos del espejismo frecuentes en las llanuras ardientes. En condiciones normales i suficientes para nuestro objeto, podemos substituir al arco de curva verdadera el del círculo osculador correspondiente, el cual estimaremos como sigue:

Sea A (fig. 10) el punto de observacion sobre la esfera terrestre, A B el horizonte sensible i A S una trayectoria luminosa que haga que la imájen S de un astro bajo el horizonte se aperciba exactamente rasándolo en B.

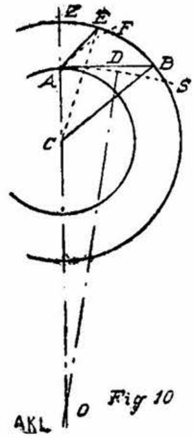

Fig 10

Se sabe por la observacion que el ángulo B A S mide aproximadamente 33 minutos i que los meteoros acusan una atmósfera de insensible densidad a los 56 km. de altura vertical, luego, con A B=A S, el radio osculador es:

$$CD = \frac{\sqrt{56\,(2R + 56)}}{2R \operatorname{tang.} 33'}$$

de donde O D=6.882 R, o, en números redondos, 7 R. La trayectoria luminosa horizontal se aproxima así a ser un arco de curvatura siete veces menor que la terrestre.

Ademas, la refraccion en altura tambien posee sensiblemente la misma curvatura, para nuestro objeto, pues a 45°, bajo un espesor A E=79 kms., este cálculo daria una refraccion de tres minutos i la observacion astronómica de un minuto. Ahora bien, si se considera que en los levantamientos altimétricos de puntos mui remotos la depresion de 45° rara vez se obtiene i que en todo caso el espesor de aire que la visual del injeniero atraviesa es ínfimo comparado con el total de la atmósfera, se comprobará la suficiencia de asignar una curvatura uniforme de radio séptuplo a toda visual altimétrica.

Con estos atecedentes, sean (fig. 1) E D=m, el ángulo D A E=P, i como ántes R= radio terrestre, A H=b, i el ángulo C A H=A, entónces:

$$m = b \left\{ \text{tang.}\ (A + P) - \text{tang.}\ A \right\} = \frac{b\,(1 + \text{tang.}^2\ A)}{\cot P - \text{tang.}\ A}$$

Como P es ángulo pequeño, puede substituirse el arco en vez de la tanjente, de manera que:

$$\cot P = \frac{14\ R}{A\ C} = \text{aprox.}\ \frac{14\ R}{D\ H} = \frac{14\ R}{b\ \text{tang}\ A}$$

i substituyendo:

$$m = \frac{b^2\ (1 + \text{tang.}^2\ A)\ \text{tang.}\ A}{14\ R - b\ \text{tang.}^2\ A} \qquad (2)$$

3.—Aproximacion de los ángulos verticales.—Independientemente de los errores de ajuste del instrumento, los cuales no consideraremos, toda medida angular adolece de un error sistemático igual a la ínfima graduacion del limbo, por ejemplo C A F = Q (fig. 1) con respecto al ángulo A, lo cual introduce un nuevo error F D $=i$ en el cateto horizontal, o sea:

$$i = b\ \text{tang.}\ (A + Q) - \text{tang.}\ A$$

$$= \frac{b\,(1 + \text{tang.}^2\ A)}{\cot Q - \text{tang.}\ A}$$

En la jeneralidad de los casos Q = *1 minuto* i *cot* Q = 3438 luego:

$$i = \frac{b\,(1 + \text{tang.}^2\ A)}{3488 - \text{tang.}\ A} \qquad (3)$$

4.—Errores de medida de las bases verticales.

Cualquier error $A\ A' = a$ (fig. 1) de mensura de la base, afecta la distancia horizontal en una cantidad $D\,G = u = a \text{ tang. } A$, pudiendo requerirse que a sea menor que una fraccion determinada de b, por ejemplo $\frac{b}{K}$, de manera que:

$$u = \frac{b}{K} \text{tang. A} \qquad (4)$$

La medida de b puede hacerse con el nivel, procedimiento que como se sabe admite gran precision sin gastos ni maniobras complicadas. Especialmente si las distancias horizontales andadas durante esta operacion son moderadas, es decir, si las estaciones del instrumento son bien aprovechadas en altura, el valor de K puede fijarse igual a 10,000.

Sin embargo, en presencia de una nivelacion volante que sube o baja una colina no debe olvidarse que cerca del suelo, como fuente de calor reflejado, los coeficientes de la refraccion que afectan las lecturas del pié de la mira llegan a ser mui diferentes de los de la parte alta de la misma, pudiendo con esto introducirse errores nada despreciables en la operacion, que ninguna posicion intermedia del instrumento es capaz de compensar.

En prevision de esto debe fijarse un límite mas abajo del cual no se permite nivelada. Pero aparte de esta i las otras precauciones de maniobra que se tomen para asegurarse contra un error mayor que $\frac{b}{10000}$, existe en nuestro montañoso Chile una causa permanente de errores, los cuales no porque pasen inapercibidos i sean casi incorrejibles dejarán de afectar ménos los levantamientos altimétricos. Este error sistemático proviene de la desviacion de la burbuja por la atraccion local de las masas serranas, la cual no es tan despreciable como a primera vista pudiera creerse. Para formarnos una idea de ella, calculemos la que produciria un cerro cónico de taludes 1×1 i masa m, compuesto de rocas comunes con densidad 2.5 (siendo la de la tierra entera 6.0, como se sabe), sobre una masa m' situada a distancia d de su centro de gravedad (fig. 31 a).

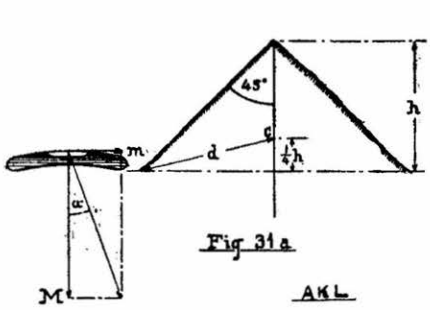

Fig. 31 a

El valor de la componente horizontal de esta atraccion, supuesta ejercida entre los centros de gravedad de ambas masas, sería:

$$\frac{0{,}97 \text{ mm}'}{d^2}$$

i la de la tierra sobre la misma burbuja:

$$\frac{M \text{ m}'}{R^2}$$

La razon entre estas atracciones, igual a la tanjente del ángulo resultante con la vertical, es tambien la pendiente, que adquiere la tanjente a la ampolla en el centro de la burbuja, la cual como se sabe es $\frac{l}{r}$, en que r es el radio de la ampolla i l la lonjitud que se desvia la burbuja. Estableciendo la igualdad:

$$\frac{0{,}97 \text{ m. } R^2}{M \text{ d}^2} = \frac{l}{r}$$

i sustituyendo los valores:

$$m = \frac{2.5}{3} \cdot \frac{\pi}{g} h^3 ; \quad M = 6 \times \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{g} \cdot R^3$$

$$d^2 = \frac{17}{16} h^2 ; \quad R = 6.367.395; \ l = 0.001,$$

se obtiene:

$$h \ r = 66956$$

Dando ahora a la ampolla los radios que se emplean en las diferentes categorias de niveles, se obtienen las alturas correspondientes h de los cerros cuya masa desvia un milímetro las burbujas.

r	h
206	325
70	956
40	1674
25	2678

En Chile estas elevaciones se encuentran a cada paso, de manera que el empleo de ampollas de alta presicion, es decir de gran radio, es improcedente ya que no seria posible verificar con frecuencia la línea zenital con delicadas observaciones astronómicas. Pero las fórmulas tambien dicen que usando la ampolla corriente de 25 metros de radio se pueden mantener aproximaciones de $\frac{1}{25000}$ en presencia de conos de 2678 metros i de $\frac{1}{10000}$ ante los de 6695 metros de altitud, cuya última cifra nos lleva al límite de nuestras cordilleras i por tanto elimina este jénero de errores dentro de dicha aproximacion.

Mas adelante indicaremos otro procedimiento para medir bases verticales sin el concurso del nivel.

ELIMINACION DEL ERROR TOTAL. Las fórmulas (1) (2) (3) i (4) son lo suficiente engorrosas para que las correcciones no puedan aplicarse en la práctica corriente del injeniero, por el recargo de trabajo que ello importaria. Es interesante investigar las condiciones bajo las cuales estos diversos errores pueden quedar eliminados de hecho i con este objeto llamemos e el error total producido por la suma de los cuatro enumerados, entre los cuales son de signos opuestos los de curvatura i refraccion, mientras que los otros dos que son de mensura, pueden sin escrúpulo considerarse por el momento que obran por exceso, es decir que ambos tienden a aumentar la distancia horizontal visada.

De esa manera, haciendo tang A = z, tendremos:

$$e = \pm \frac{b\, z^3}{2\,(R\text{-}bz^2\ )} \mp \frac{b^2\ z\,(1+z^2\ )}{14\,R\text{-}b\ z^2} + \frac{b\ z}{10000} + \frac{b\,(1+z^2\ )}{3438-z}$$

Esta expresion puede simplificarse despreciando el término bz^2 en presencia de las cantidades considerablemente mayores R i 14R, i ademas reemplazando en el 2.º i 4.º término el factor $(1+z^2\ )$ por z^2 , puesto que en la práctica, sobre todo en la precisa que fija los vértices, z es constantemente mayor que la unidad, por ser siempre la altura vertical disponible mucho menor que la distancia horizontal que se visa, fuera de que los grandes denominadores que dichos términos afectan haran que el valor de las fracciones no se altere sensiblemente con este cambio de numeradores. Por esas consideraciones resultará, haciendo ademas $bz = \delta$:

$$e = \pm \frac{3\,\delta^2\ z}{7\,R} + \frac{\delta}{10000} + \frac{\delta z}{3438 - z} \quad (5)$$

En su mayor jeneralidad esta es una ecuacion entre tres variables e, δ, z, de las cuales conocidas dos puede obtenerse la tercera.

Pero siendo nuestro objeto la eliminacion del error e debemos investigar las condiciones segun las cuales obtenga un valor límite en funcion de los datos de la observacion.

Desde luego pudiera derivarse una funcion (que resultaria de un grado superior), la cual indícase en términos de z i δ el *máximo absoluto* de e; pero los resultados son complicados i ménos prácticos que buscar el máximo relativo de e con respecto a δ, por ejemplo, por ser esta última el objetivo primordial de todo el levantamiento altimétrico.

Diferenciando entónces e con respecto a δ i haciendo $\frac{d\,e}{d\,\delta} = O$, se obtendra:

$$\delta = \mp \frac{7\,R}{6\,z} \left(\frac{1}{10000} + \frac{z}{3438-z}\right) \quad (7)$$

Valor de la distancia horizontal en funcion de z que encierra un error máximo.

Aplicando a z valores arbitrarios, tras de dar a R el que le corresponde de 6.367.395 metros, se obtendran para δ los de la tabla siguiente:

z	δ	Angulo A.
2	2533	63° 30′
3	2409	—
6	2288	—
10	2288	—
15	2222	—
20	2209	—
30	2197	—
50	2200	88° 52′
100	2232	89° 26′

Como salta a la vista que el valor de la horizontal δ se hace notablemente constante entre los límites 63° i 89° del ángulo altimétrico A, ello acarrea la conclusion que dicha distancia, cuyo promedio es de 2300 metros representa aquella que en las condiciones anotadas está afectada del máximo error relativo i por tanto medirá el límite de amplitud que pueda darse a un levantamiento de precision corriente, cualquiera que sea la magnitud de la base vertical que se emplee o la del ángulo altimétrico observado entre dichos límites, salvo cuando se emprenda la correccion espresa de los errores.

Si en vez de límite horizontal deseáramos conocer la mayor base que sea lícito emplear con cada ángulo i el error que ello acarrea en la distancia, calcularíamos con la fórmula (5) los valores que siguien:

z	e	b	$\frac{e}{\delta}$
2	0.86 m	1266 m	0.00034
3	1.17	803	0.00049
6	2.12	381	0.00092
10	3.38	229	0.00151
15	4.98	148	0.00224
20	6.58	110	0.00297
30	9.82	73	0.00445
50	16.41	44	0.00743

Se notará que dentro de la amplitud fijada el error de distancia alcanza con el mayor ángulo práctico un valor de siete milésimas.

Errores nulos.—Igualando directamente a cero el valor de e dado por la ecuacion (5) se obtiene un valor de la horizontal:

$$\delta = \mp \frac{7\ R}{3\ z}\left(\frac{1}{10000} + \frac{z}{3438 - z}\right)$$

justamente el doble del de la fórmula (7) que hemos tabulado.

Pero esta solucion nula, con $4\frac{1}{2}$ Kms de visual, aunque halagadora a primera vista, no es jeneral como pasamos a manifestarlo.

En efecto, la ecuacion (5), con e como ordenada i δ como abcisa, abarca dos series de curvas parabólicas cuyos individuos se distinguen entre sí por el valor que se dé al parámetro z. Si se las construye gráficamente se verá que todas parten del oríjen i que las ordenadas de la primera serie pasan por valores máximos para descender nuevamente a cero con abcisas dobles de las de estos máximos; ademas todos sus ejemplares se confunden prácticamente en una curva única.

Es el caso que hemos revistado i tabulado.

En la segunda serie las ordenadas siguen un aumento contínuo con las abcisas i por tanto no puede existir ordenada cero, salvo en el origen, notándose que desde allí hasta la abcisa del máximo citado las dos series de curvas se mantienen lo suficiente aproximadas entre sí para poder considerar con fines prácticos que se confunden sensiblemente; pero, desde ese punto su diverjencia sigue en aumento.

Por consiguiente, como durante los operaciones del terreno no podremos por lo jeneral precisar cuál de las dos curvas será la que representa el error de levantamiento en un caso dado, máxime cuando no se conoce el signo verdadero de los errores parciales de mensura, el cual provisoriamente adoptamos en la pag. 138 como positivo, nos cumple como precaucion evidente restrinjir siempre la amplitud de la visual a 2 300 metros, como límite dentro del cuál todas las parábolas alcanzan a confundirse, pero pasado el cual solo lo verifican las de la primera serie. Reservaremos sí la doble distancia cuyo error es nulo, peculiar de esta familia, como un simple medio de comprobacion posible para verificar con observaciones extremas la posicion de los vértices fijados en la mas modesta sucesion de cortas amplitudes.

APLICACIONES

Sentado estonces este máximo alcance práctico de 2 300 metros, es llegado el momento de ilustrar las siguientes aplicaciones del método altimétrico.

1. *Levantamiento de las costas, arrecifes i cuerpos flotantes.*
2. *Levantamientos lacustres.*
3. *Levantamientos de los polígonos ubicados en cualquier relieve.*
4. *Reconocimientos de Cordillera. Verificacion de un polígono taquimétrico.*
5. *Fijacion de polos o vértices altimétricos. Medida indirecta de las bases verticales.*

1. Levantamiento de las costas etc.

Mientras mas rugosa sea una costa, mayores son las probabilidades de obtener puntos de vista prominentes para estaciones, los que sabemos deben elejirse espaciados como 2 300 metros entre sí.

Cada punto de la ribera deberá ser dominado desde uno u otro de estos polos, i de esto debe especialmente cuidarse cuando haya grandes peñascos que obstruyan la vista. En casos extremos puede sin embargo emplearse una banderola que sobresalga del obstáculo para marcar los puntos invisibles, cuidando de anotar la division a la cual se dirije la visual para que dicha dicha altura de mira sea restada de la base comun cuando se trate de fijar el punto que marcó el pié.

Las olas i las mareas producen cierta variacion en la línea riberana; pero el efecto de las primeras puede limitarse dirigiendo visual al punto donde la ola refluye para restablecer el equilibrio despues de romper, o bien utilizando la depresion del horizonte, segun veremos, mientras que las líneas de altas i bajas mareas pueden levantarse directamente desde las mismas estaciones con tal que la altitud de estas sea referida a dichos nuevos niveles.

Todos los arrecifes desligados é inaccesibles podran tambien levantarse como situados al nivel comun i lo mismo rije respecto de los puntos de sondaje, o la trayectoria de cualquier objeto flotante, por ejemplo un barco guerra que se mueva dentro de los límites prescriptos.

Al comenzar el levantamiento de una seccion, lo primero que ha de hacerse es referir el nivel del agua, tal como se muestra durante la calma momentánea que sucede a la ruptura de la ola, a un punto de referencia en seco. Tambien pudiera medirse la depresion del horizonte cerca del agua i utilizarla como veremos. Enseguida puede estacionarse el altímetro en la altura, fijando su cota por medio de una visual horizontal dirijida a otro punto de referencia próximo; en seguida se orienta el limbo azimutal en la forma ordinaria i por último se dirijen visuales a los diversos puntos de la costa que sean menester, anotando los ángulos altimétricos i azimutales correspondientes a cada uno.

Agotados estos datos se procede a una nivelacion volante entre los puntos de referencia superior e inferior, con mas la adicion de las dos niveladas parciales que los fijaron. Si fuere preciso se llevaría en cuenta la variacion del nivel marino durante el tiempo de la operacion o sino se considerará la ribera levantada como un promedio.

2.—Levantamientos lacustres.

Los procedimientos son en este caso los mismos que ántes, con aguas mas tranquilas. La vejetacion puede hasta cierto punto impedir la vista perfecta de la línea riberana; pero esto puede salvarse elijiendo las estaciones en opuestas playas o visando las divisiones de una banderola cuyo pié marque los puntos invisibles.

Pasada cierta altitud en la Cordillera la vejetacion queda eliminada, pero entónces son las lomas i cuchillas, mas agrestes i escarpadas, las que se agrupan para formar senos profundos cuyo levantamiento exije la multiplicacion de las estaciones i consiguiente acumulacion de errores. Para controlar éstos, conviene que los distintos polos o vértices sean coordinados en un polígono cerrado, cuyo error de cierre se discute en la forma ordinaria.

De esa manera se pueden hacer levantamientos de lagunas, represas, pantanos a nivel, con sus respectivos sondajes, i cuando se desprecian declives mui pequeños, tambien los de rios navegables, canalés de regadio, ect. con la suficiente aproximacion práctica, mientras que la posicion de las sondas de aforo en la seccion tranversal de cualquier curso de agua tranquilo quedará determinada con toda exactitud.

3.—Levantamiento de los polígonos ubicados en cualquier relieve

Este es un caso mucho mas jeneral que los anteriores i tal que imprime carácter de universalidad al método altimétrico i sin embargo, tanto la teoría como la práctica son mui sencillas.

En efecto, como cada punto de un levantamiento altimétrico queda fijo siempre que se conozca su diferencia de nivel con la estacion, bastará combinar con las observaciones angulares que hemos visto, una nivelacion volante de los puntos consiguientes que forman el polígono.

La operacion es enteramente práctica i talvez mas rápida i controlada que una triangulacion. Se recorre el terreno estacando i nivelando los puntos ordinarios, se prosigue la nivelacion hasta el punto superior o inferior que se haya elejido como estacion altimétrica, el cual se distinguirá por la propiedad de ser visible desde todos los puntos recorridos, i por último se toman en el mismo órden que el recorrido los ángulos azimutales i altimétricos de los diversos puntos, destacando para ello una banderola que los marque sucesivamente i permita ademas salvar las invisibilidades del pié.

Escusado es decir que el límite de 2300 metros no debe propasarse.

Puede suceder que el perfil del estacado sea una o variás horizontales, en cuyo caso se tratará de un levantamiento hipsométrico de conjunto que puede tener aplicaciones territoriales.

4.—Reconocimientos de Cordillera. Verificacion de un polígono taquimétrico

Si se considera el notable acercamiento de relaciones que últimamente se ha promovido entre las dos naciones cuya pared divisoria es la Cordillera, es necesario convenir en que los proyectos de vias trasandinas constituyen hoi temas de la mayor actualidad.

Ademas, por lo que toca al interes profesional de estos asuntos, se hace necesario reclamar mui alto para los injenieros chilenos la definicion de los detalles de estas obras, pues puede afirmarse con los testimonios de la estadística oficial, que ellos mejor que nadie están habituados al manejo económico de los grandes desniveles característicos de su pais i por tanto en aptitud de encontrar el trazado ménos oneroso que solucione una determinoda ruta montañosa.

Los reconocimientos de un paso cordillerano son los que en definitiva seleccionan la gradiente, curvatura i obras mayores de arte, entre todos los accesos que por ambas vertientes se ofrezcan. Aunque jeneralmente tales reconocimientos se hacen por aproximaciones sucesivas, no existe razon técnica alguna que impida hacerlos completos de una vez i el método altimétrico es capaz de indicar todo el partido que puede sacarse de las observaciones barométricas para hacerlos rápidos i seguros.

Armado el injeniero del consiguiente aneroide i de un eclímetro con brújula de reflexion, anotará la altitud barométrica de la estacion i ademas los ángulos altimétrico i azimutal de un punto situado a ménos de 2300 metros en avante, a donde se haya trasladado un ayuda provisto tambien de aneroide i eclímetro, para practicar una observacion recíproca.

Las diferencias de nivel de ambas observaciones se cotejan inmediatamente i asimismo los ángulos i rumbos, para control de las operaciones.

Los instrumentos de reflexion permitirán operar de a caballo. El polígono se costruye como de ordinario.

El método altimétrico es tambien útil para verificar el polígono taquimétrico sin otros datos que los de las carteras. En efecto, desde que la nivelacion directa de los vértices es siempre operacion anexa al trazado, ello permite conocer la diferencia de nivel entre cada dos estaciones, la cual combinada con el ángulo de altura taquimétrica dará la distancia entre estaciones, independiente de las medidas micrométricas.

5.—Fijacion de los polos o vértices altimétricos. Medida indirecta de las bases verticales.

Hemos visto cómo cada estacion del altímetro es un polo desde donde irradian visuales a los puntos de relleno, i que el agregado de estos polos, distantes entre sí 2 300 metros, constituye los vértices del polígono fundamental del levantamiento. Es evidente entónces, que de la posicion exacta de dichos vértices depende la correccion de los resultados.

Para relacionarlos entre sí, sin cambiar de método, bastará que guarden diferencias de nivel suficientes, tales como las de la columna b páj. 139 lo cual es facilísimo en Chile.

Las observaciones recíprocas repetidas, el cierre del polígono en los casos de lagos e islas, i por último las visuales tambien recíprocas entre vértices alternados, que segun hemos vistos pueden a veces conducir al error nulo, son otros tantos medios de discusion de resultados.

Puede suceder que no se disponga de nivel con qué medir las bases verticales, de manera que ello habrá de efectuarse indirectamente. Para esto se traza una base horizontal a cuyos dos extremos supongámosles las coordenadas x, y, z; x', y', z' i cuya lonjitud *d*, medida con las precauciones necesarias, será en jeneral:

$$d^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Sean ahora el eje de las z la vertical que pasa por el polo, el plano de las $z\,x'$ el que incluye dicha vertical i pasa por unos de los extremos de la base i el plano de las $x\,y$ uno horizontal de comparacion, por ejemplo el de las aguas. Llamemos además b la altitud incógnita del polo sobre el plano $x\,y$, A i B, los ángulos altimétricos a los extremos de la base i por último S la diferencia de azimutes, entonces:

$$\begin{aligned} x &= (b - z) \operatorname{tang} A \\ x' &= (b - z') \operatorname{tang} B \cos S \\ y &= o \\ y' &= (b - z') \operatorname{tang} B \operatorname{sen} S \end{aligned}$$

i substituyendo:

$$d^2 - (z - z')^2 = [\,(b - z) \operatorname{tang} A - (b - z') \operatorname{tang} B \cos S]^2 + (b - z')^2 \operatorname{tang}^2 B \operatorname{sen}^2 S$$

ecuacion de segundo grado en que b es la única incógnita.

Si queremos simplificarla haremos $z = z'$, condicion que podrá cumplirse muchas veces sin incoveniente, luego:

$$d^2 = (b - z)^2\, [\, \operatorname{tang}^2 A + \operatorname{tang}^2 B + 2 \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \cos S\,]$$

i como el coficiente trigonométrico es fácil de calcular lo llamaremos m^2, de donde:

$$b = \frac{d + m\,z}{m} \quad (8)$$

La cota z es pequeña i por tanto fácil de obtenerla directamente por procedimientos elementales.

Otro método de medida indirecta de las bases verticales es por medio de la depresion del horizonte, supuesta la tierra esférica, cuya fórmula jeodésica con el radio de curvatura del rayo refractado igual 7 R, es como se sabe:

$$b = \frac{4}{7} R \cot^2 A \quad (9)$$

siendo A el ángulo de depresion.

Los resultados que se obtengan exijen comprobaciones.

La fórmula (9) puede tambien servir para obtener el verdadero nivel del mar cuando haya incertidumbre en el equilibrio de las olas. Bastará estacionarse a unos dos o tres metros de altura sobre las aguas para medir el pequeño ángulo de depresion que se ofrezca i con él obtener b por cálculo.

Tales son suscintamente las aplicaciones de que es susceptible el método altimétrico, las cuales desmuestran que los territorios de grandes relieves lejos de ofrecer dificultades a las aplicaciones topográficas rápidas, tienen al contrario muchas ventajas cuando se sabe sacar partido de los desniveles.

Casi estariamos tentados a hacer extensiva la misma proposicion a las aplicaciones jeodésicas, porque personalmente no nos cabe duda que la medida de un arco de meridiano internacional en nuestro montañoso pais, es enormemente mas factible que en comarcas puramente llanas,

Si proseguimos mas allá con la asociacion de las ideas, veremos que los grandes desniveles de este suelo agregan con este un nuevo i no despreciable mérito a los que ya tienen asegurados como fuentes de enerjías estupendas, las cuales algun dia discutiremos como llamadas a consolidar el porvenir de Chile i la felicidad i riqueza de los chilenos.