Tomo XVII 15 de Enero de 1900 Núm. 108

ANALES DEL INSTITUTO DE INJENIEROS

CÁLCULO DE LA PÉRDIDA DE TIEMPO DURANTE EL DEMARRAGE DE UN TREN.

En el número 6 de la *Revue générale des chemins de fer* que tuvo la amabilidad de proporcionarme el señor Luis Cousin, se puede leer un estudio del señor Desdouits sobre la *pérdida de tiempo durante el demarrage de un tren*. El método empleado en este estudio es semi-gráfico, semi-analítico; pero, apesar de su sencillez aparente, no se presta con facilidad a las aplicaciones numéricas i, ademas, la precision de los resultados deja mucho que desear cuando las velocidades de réjimen son mui grandes.

Miéntras tanto el método puramente analítico conduce a cálculos numéricos relativamente sencillos i los resultados obtenidos tienen una precision tan grande como se quiere, cualquiera que sea la magnitud de la velocidad de réjimen.

*
* *

Los datos del problema son los siguientes:

P potencia de la locomotora, en caballos vapor;

F fuerza motriz máxima, en kilógramos;

p peso de la locomotora, en toneladas;

P peso total de los carros, en toneladas;

V velocidad de réjimen, en metros por segundo.

Se trata con estos datos de calcular el tiempo T que demora el tren para pasar de la velocidad cero a la velocidad V, el camino S recorrido durante este tiempo T i la diferencia $T-\frac{V}{S}$, o sea, la pérdida de tiempo debida al *demarrage.*

* * *

Para mas sencillez se supone que el terreno es perfectamente horizontal i que, desde que principia a moverse el tren, la fuerza motriz de la máquina tiene su valor máximo F.

Sean, en un momento cualquiera t, v la velocidad del tren en metros por segundo i f la fuerza motriz de la máquina en kilógramos; el trabajo de esta fuerza durante el tiempo dt, es $fvdt$ kilogrametros; por otra parte, el trabajo de la máquina no puede pasar de $75Pdt$ kilogrametros durante el tiempo dt, luego se tendrá a cada momento,

$$fvdt \leq 75Pdt$$

o bien

$$fv \leq 75P$$

Segun esto, se deberán considerar dos períodos durante el *demarrage:* en el primero el producto fv varía progresivamente desde cero hasta $75P$, la fuerza motriz f tiene un valor constante F i la velocidad v varía desde cero hasta un valor V_x definido por la relacion.

$$FV_x = 75P \tag{1}$$

En el segundo período el producto fv queda igual a $75P$, la fuerza motriz disminuye i la velocidad v varía desde V_x hasta el valor V de la velocidad de réjimen.

* * *

Para arrastrar el tren, la máquina debe vencer cierta resistencia R, la cual depende a la vez del peso del tren i de su velocidad. La esperiencia demuestra que el valor de R es dado por la fórmula

$$R=p\left(2+\frac{v}{3}\right)+\pi\left(1+\frac{v}{10}\right)$$

R es un número de kilógramos i p, π son números de toneladas.

La fuerza acceleratriz del tren es, por consiguiente, $f-R$ i se tiene durante el primer período

$$(f-R)_1=F-p\left(2+\frac{v}{3}\right)-\pi\left(1+\frac{v}{10}\right)$$

i, durante el segundo período,

$$(f-R)_2=\frac{75P}{v}-p\left(2+\frac{v}{3}\right)-\pi\left(1+\frac{v}{10}\right)$$

Para simplificar la escritura pondremos

$$(2)\qquad \begin{cases} F-2p-\pi=a \\ \dfrac{p}{3}+\dfrac{\pi}{10}=b \end{cases}$$

Entónces

$$(f-R)_1=a-bv$$

$$(f-R)_2=\frac{75P}{v}-(2p+\pi)-bv$$

* * *

Sea M la masa del tren; durante el elemento de tiempo dt el aumento Mdv de su cantidad de movimiento es igual a la impulsion $(f-R)dt$ de la fuerza acceleratriz, se tiene, por consiguiente,

$$M\frac{dv}{dt}=f-R$$

Como la fuerza acceleratriz $f-R$ disminuye a medida que la velocidad aumenta, el valor de v que anula $f-R$ será un límite superior de la velocidad. Este límite será jeneralmente mayor que V_x i averiguará la ecuacion

$$(f-R)_2=\frac{75p}{v}-(2p+\pi)-bv=0,$$

o bien

$$bv^2+(2p+\pi)v-75P=0. \tag{3}$$

Las raices de esta ecuacion tienen signos contrarios; sea V_m la raiz positiva i $-K$ la negativa, podremos escribir

$$(f-R)_2=\frac{b(V_m-v)(K+v)}{v}$$

Esta fórmula muestra que V_m es un límite superior de la velocidad del tren.

* * *

Para calcular el tiempo T deduciremos de la relacion anterior

$$dt=M\frac{dv}{f-R}$$

Luego

$$T=M\int_0^{V_x}\frac{dv}{(f-R)_1}+M\int_{V_x}^{V}\frac{dv}{(f-R)_2}$$

o bien

$$T=M\int_0^{V_x}\frac{dv}{a-bv}+\frac{M}{b}\int_{V_x}^{V}\frac{vdv}{(V_m-v)(K+v)}\quad ,$$

Las integraciones no presentan dificultad i se obtiene

$$(4)\qquad T=\frac{M}{b}\left\{L\frac{a}{a-bV_x}+\frac{V_m}{K+V_m}L\frac{V_m-V_x}{V_m-V}-\frac{K}{K+V_m}L\frac{K+V}{K+V_x}\right\}$$

Del mismo modo, para calcular S partiremos de la fórmula

$$ds=vdt=M\frac{vdv}{f-R}$$

de la cual se deduce

$$S=M\int_0^{V_x}\frac{vdv}{(f-R)_1}+M\int_{V_x}^{V}\frac{vdv}{(f-R)_2}$$

o bien

$$S=M\int_0^{V_x}\frac{vdv}{a-bv}+\frac{M}{b}\int_{V_x}^{V}\frac{v^2dv}{(V_m-v)\,(K+v)}$$

Se obtiene entónces

$$(5)\quad S=\frac{M}{b}\left\{\frac{a}{b}L\frac{a}{a-bV_x}+\frac{V^2_m}{K+V_m}L\frac{V_m-V_x}{V_m-V}+\frac{K^2}{K+V_m}L\frac{K+V}{K+V_x}-V\right\}$$

Finalmente de (4) i (5) se deduce

$$(6)\quad T-\frac{S}{V}=\frac{M}{b}\left\{1-\frac{a-bV}{bV}L\frac{a}{a-bVx}-\frac{V_m(V_m-V)}{V(K+V_m)}L\frac{V_m-V_x}{V_m-V}\right.$$

$$\left.-\frac{K(K+V)}{V(K+V_m)}L\frac{K+V}{K+V_x}\right\}$$

Las fórmulas (4) i (5) muestran que T i S aumentan a medida que la velocidad de réjimen V aumenta i tienden hácia el infinito cuando V tiende hácia el límite V_m; sin embargo, en las mismas condiciones, la pérdida de tiempo $T-\dfrac{S}{V}$ tiende hácia un límite finito; se deduce, en efecto, de (6)

$$(7)\quad \text{lím.}\left(T-\frac{S}{V}\right)=\frac{M}{b}\left\{1-\frac{a-bV_m}{bV_m}L\frac{a}{a-bV_x}-\frac{K}{V_m}L\frac{K+V_m}{K+V_x}\right\}$$

APLICACION NUMÉRICA

Consideraremos aquí el mismo ejemplo elejido por el señor Desdouits en su estudio. Se trata de un tren espreso tipo *Bonnefond* i los datos numéricos son:

$P=$ 650 caballos vapor
$F=$ 4900 kilógramos
$p=$ 70 toneladas
$\pi=$ 130 toneladas.

Se calcula, en primer lugar, la velocidad V_x por medio de la relacion (1),

$$4900\,V_x=75\times 650=48750$$

De aquí se deduce

$$V_x=9,^{m}95 \text{ por segundo } (36^{km} \text{ por hora})$$

Se tiene en seguida, segun (2)

$$a=F-2p-\pi=4630$$

$$b=\frac{p}{3}+\frac{\pi}{10}=36,3$$

La ecuacion (3) es entónces

$$36,3\,V^2+270\,v-48750=0$$

De aquí se deduce

$$V_m=33,1$$

$$K=40,5$$

Luego la velocidad máxima V_m del tren considerado es de 33,^{m}1 por segundo o 119^{km} por hora.

La masa total del tren está definida por la ecuacion

$$Mg = 1000\ (p + \pi)$$

g es la acceleracion de la pesantez; en la práctica se multiplica M por el factor 1,08 para tomar en cuenta el esfuerzo gastado en hacer jirar los ejes de las ruedas; luego, en el caso del tren considerado, se tomará

$$M = \frac{1000 \times 200}{9{,}8} \times 1{,}08 = 22040$$

Con estos valores numéricos se obtiene:

$$T = 49{,}^s5 + 628{,}^s8 \log \frac{V_m - V_x}{V_m - V} - 769{,}^s4 \log. \frac{K + V}{K + V}$$

$$S = 2081^m \log. \frac{V_m - V_x}{V_m - V} + 3116^m \log \frac{K + V}{K + V_x} - 607{,}^m2\,(V - 10{,}41)$$

$$\lim. \left(T - \frac{S}{V} \right) = 186^s$$

Así, en caso del tren considerado, la pérdida de tiempo debida al *demarrage* no puede nunca pasar de 186 segundos.

***

Damos a continuacion una série de valores de T i S deducidos de las fórmulas anteriores (columna 1); al lado de estos valores se dan los que obtuvo el señor Desdouits (columna 2) i los que se dedujeron de la observacion directa (columna 3).

Velocidad de réjimen	T			S			Pérdida de tiempo		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
60^{km} por hora	101^s	103^s	101^s	950^m	1000^m	930^m	44^s	43^s	45^s
70 ,,	136	138	133	1580	1650	1510	55	54	55
80 ,,	183	189	176	2570	2650	2400	67	70	68
90 ,,	249	260	241	4120	4350	3950	84	86	83
100 ,,	350	......	......	6790	......	......	106	....	....
110 ,,	538	......	......	12270	......	......	136	....	....
119 ,,	∞	......	......	∞	......	......	186	....	....

A. Obrecht.